COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

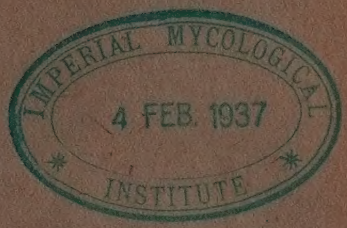
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

NOUVELLE SÉRIE

1936

VOLUME IV

№ 6



ÉDITION DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
MOSCOU

AVIS AUX AUTEURS

Les «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS» sont publiés en livraisons, neuf numéros formant un volume d'environ 500 pages pourvu de sa table des matières.

Les «Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS» publient des communications préalables des auteurs précisant le contenu essentiel des travaux plus volumineux en préparation. Ces articles, ne dépassant pas comme règle dix mille signes typographiques, sont donnés en l'une des trois langues: français, anglais, allemand. Ils embrassent les sciences mathématiques, physiques et naturelles et les aspects théoriques des applications techniques, reproduisant des résultats de recherches scientifiques actuellement en cours ou à peine achevées qui représentent les plus récentes acquisitions de l'investigation scientifique.

Les articles sont publiés dans la langue de l'original envoyé par l'auteur (français, anglais, allemand).

Les auteurs ont droit chacun à 25 extraits gratuits.

Les manuscrits doivent être adressés à la Rédaction de «Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS»—Moscou, oulitza Koujbysheva, 8.

COMPTES RENDUS

(DOKLADY)

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

NOUVELLE SÉRIE

4-me année

Paraissant tous les dix jours

COMITÉ DE RÉDACTION

A. Borissiak, de l'Académie, A. Fersman, de l'Académie, A. Richter, de l'Académie,
S. Wawilow, de l'Académie

1936

VOLUME IV (XIII)—№ 6 (110)

Moscou

TABLE DES MATIÈRES

MATHÉMATIQUES

S. Soboleff, membre correspondant de l'Académie. L'algorithme de Schwarz dans la théorie de l'élasticité 243
N. Košliakov (Koshliakov), Corresponding Member of the Academy. Note on Some Infinite Integrals 247
B. Segal. Generalized Waring's Problem in Connection with the Estimation of Trigonometrical Sums 251
Gr. Fichtenholz. Contribution à la théorie des fonctionnelles linéaires . . 255

PHYSIQUE

M. P. Želdak. Beeinflussung der Verteilung von Restspannungen erster Art in einem Zylinder durch das Zerschneiden 259

GÉOCHIMIE

P. M. Murzajev. Sericitization of Pegmatites of the Gdov District, Leningrad Region, and Its Genesis 265

GÉOLOGIE

A. G. Eberzin. Über das Miozän Südost-Transkaukasiens 269
G. G. Martinson. Verteilung der Nadeln von Schwämmen in einem Bohrloch bei Tiefbohrungen in der Nähe des Dorfes Possolsk am Baikalsee 273

MINÉRALOGIE

G. Laemmlein. Über gewundene Quarze 279

MICROBIOLOGIE

A. E. Kriss. Sur l'anthocyanine chez les actinomycètes 283

ZOOLOGIE

V. Vasnecov. Die Schwanzkiele der Fische 289

Imprimé par l'ordre de l'Académie des Sciences de l'URSS.
Secrétaire perpétuel membre de l'Académie **N. Gorbounov.**
Comité de Rédaction: **A. Borissiak,** de l'Académie, **A. Fersman,** de l'Académie, **A. Richter,** de l'Académie, **S. Wawilow,** de l'Académie

Rédacteur en chef A. Fersman — Rédacteur S. Bernstein

En composition: 2/XI 1936.—En impression: 2/XII 1936.—Nombre de feuilles d'imprimerie: $3^1/_4$. Nombre de caractéres par feuille imprimée 65.000.—Pages 241—292. Format du papier 72×110 cm. Tirage 1400. Moscou. Glavlit B—54211.—Numéro d'édition 503. Numéro typographique 1422.

Imprimerie № 16, Moscou, Trekhproudnij pereoulok, 9.

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

MATHÉMATIQUES

L'ALGORITHME DE SCHWARZ DANS LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

Par S. SOBOLEFF, membre correspondant de l'Academie

Dans la théorie du potentiel il existe un algorithme permettant de résoudre le problème de Dirichlet dans un domaine D'_{12} qui est la somme de deux autres domaines D_1 et D_2, après avoir résolu successivement ce problème pour chacun de ces deux domaines.

Un procédé analogue a été proposé par S. Michlin pour la résolution du problème de la théorie de l'élasticité dans un domaine multiplement connexe D_{12} qui est le produit de deux autres domaines D_1 et D_2. Michlin a établi la convergence de l'algorithme seulement dans le cas où les contours du domaine sont suffisamment éloignés l'un de l'autre. Dans le présent article nous allons considérer le problème des déplacements élastiques, et établir pour une classe plus étendue de domaines D_1 et D_2 la convergence des deux algorithmes précédents.

Soit S_1 la surface du domaine D_1 et S_2 la surface du domaine D_2. Désignons par S'_1 la partie de S_1 qui se trouve à l'intérieur de D_2 et par S''_1 la partie de S_1 située à l'extérieur de ce domaine. De même soit S' la partie de S_2 intérieure à D_1 et S''_2 la partie extérieure. Désignons par l la ligne d'intersection des surfaces S_1 et S_2. Supposons que toutes les surfaces S sont suffisamment régulières.

Le premier problème que nous considérons ici est de résoudre les équations de la théorie de l'élasticité:

$$L^{\alpha\beta} u_\beta = (\lambda + \mu)\, \nabla^\alpha \nabla^\beta u_\beta + \mu \nabla^2 u^\alpha = (\lambda + \mu)\, \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} \qquad (1)$$

dans le domaine D'_{12} en exigeant que l'on ait:

$$u_\beta |_{S''_1} = \psi_\beta; \quad u_\beta |_{S''_2} = \gamma_\beta. \qquad (2)$$

Le second problème est de résoudre les mêmes équations (1) dans le domaine D_{12} dans le cas où

$$u_\beta |_{S'_1} = \psi_\beta; \quad u_\beta |_{S'_2} = \gamma_\beta. \qquad (3)$$

Nous désignons ici par u_β le vecteur inconnu du déplacement dont les valeurs limites sur les contours du domaine correspondant sont données.

À chacun des vecteurs φ_γ du déplacement donné dans D'_{12} nous faisons correspondre l'intégrale $E(\varphi_\gamma)$ qui est l'énergie de la déformation:

$$E(\varphi_\gamma) = \iiint_{D'_{12}} \left[\lambda (\nabla^\alpha \varphi_\alpha)^2 + \frac{\mu}{2} (\nabla^\alpha \varphi_\beta + \nabla_\beta \varphi^\alpha)^2 \right] dxdydz. \tag{4}$$

Le problème d'intégration de l'équation (1) avec les conditions limites sur les contours de quelque domaine est équivalent au problème suivant du calcul des variations: parmi tous les φ_γ satisfaisant aux mêmes conditions limites trouver celle qui donne la moindre valeur possible à l'intégrale du type (4) étendue à ce domaine.

On obtient la suite de fonctions $u_\beta^{(i)}$ ($i=0, 1, 2,\ldots$) qui converge vers la solution du premier problème à l'aide de la règle suivante.

Toutes les fonctions $u_\beta^{(2k)}$ sont régulières dans D_2 et dans $D'_1 = D_1 - D_2$ et satisfont dans ces domaines aux équations (1).

Dans D'_{12} les u_β sont continues. D'ailleurs, elles satisfont aux conditions suivantes:

$$u_\beta^{(2k)}|_{S''_1} = \psi_\beta; \quad u_\beta^{(2k)}|_{S''_2} = \gamma_\beta; \quad u_\beta^{(2k)}|_{S'_2} = \begin{cases} \omega_\beta & k=0 \\ u_\beta^{(2k-1)}|_{S'_2} & k>0 \end{cases} \tag{5}$$

La fonction ω_β est une fonction arbitraire suffisamment régulière, coïncidant avec ψ_β et χ_β sur l.

Toutes les fonctions $u_\beta^{(2k+1)}$ sont continues dans D'_{12}, régulières dans D_1 et $D'_2 = D_2 - D_1$. Elles satisfont dans D_1 et D_2 aux équations (1) et sur le contour de ce domaine aux conditions:

$$u_\beta^{(2k+1)}|_{S''_1} = \psi_\beta; \quad u_\beta^{(2k+1)}|_{S''_2} = \gamma_\beta; \quad u_\beta^{(2k+1)}|_{S''_1} = u_\beta^{(2k)}|_{S'_1} \quad k \geqslant 0. \tag{6}$$

Le vecteur $u_\beta^{(2k)}$ pour $k>0$ donne le minimum de $E(\bar{u}_\beta)$ pour tous les vecteurs $\bar{u}_\gamma$ satisfaisant à (5). En particulier, pour $\bar{u}_\gamma$ on peut prendre $u_\gamma^{(2k-1)}$ d'où l'on tire:

$$E(u_\gamma^{(2k)}) \leqslant E(u_\gamma^{(2k-1)}). \tag{7}$$

D'une façon analogue on peut établir que

$$E(u_\gamma^{(2k+1)}) \leqslant E(u_\gamma^{(2k)}). \tag{8}$$

La suite $E(u_\gamma^{(m)})$ est une suite décroissante de nombres positifs. Donc, elle est convergente. En désignant par c sa limite, nous aurons pour k assez grand

$$E(u_\gamma^{(2k-1)}) < c+\varepsilon; \; E(u_\gamma^{(2k)}) < c+\varepsilon. \tag{9}$$

En remarquant que $\dfrac{u_\beta^{(2k)} + u_\beta^{(2k-1)}}{2}$ satisfait aux égalités (5) nous obtenons:

$$E\left(\frac{u_\beta^{(2k)} + u_\beta^{(2k-1)}}{2}\right) > c; \tag{10}$$

d'où

$$E(u_\beta^{(2k)} - u_\beta^{(2k-1)}) = 2E(u_\beta^{(2k)}) + 2E(u_\beta^{(2k-1)}) - 4E\left(\frac{u_\beta^{(2k)} + u_\beta^{(2k-1)}}{2}\right) < 4\varepsilon, \tag{11}$$

et d'une façon analogue

$$E(u_\beta^{(2k+1)} - u_\beta^{(2k)}) < 4\varepsilon. \tag{12}$$

En partant de ces inégalités et à l'aide d'évaluations ordinaires on s'assure que la différence $w_\beta^{(m)} = u_\beta^{(m)} - u_\beta^{(m-1)}$ tend vers zéro dans le domaine D'_{12} ainsi que ses dérivées premières.

Construisons la fonction de Green pour le domaine D'_{12} c'est-à-dire la fonction $G^{\alpha\beta}$ de deux points P et P_1, qui a une singularité dans le point P_1 pour P variable et qui peut être présentée sous la forme:

$$G^{\alpha\beta}(P,P_1) = g^{\alpha\beta} + \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\nabla^\alpha\nabla^\beta r - \frac{1}{4\pi\mu}\frac{1}{r}\delta^{\alpha\beta}. \tag{13}$$

Ici r est la distance entre les points P et P_1 et $g^{\alpha\beta}$ pour α fixe est une solution particulière des équations de la théorie de l'élasticité, choisie de la façon que $G^{\alpha\beta}$ s'annule sur le contour de D'_{12}.

Pour fixer les idées supposons que m est un nombre pair. Alors les premières dérivées de $u_\beta^{(m)}$ ont des discontinuités sur la surface S'_2 et celles de $u_\beta^{(m-1)}$ sur S'_1. Alors la fonction $u_\alpha^{(m)}$ peut être présentée dans D_2 au moyen de la formule:

$$u_\alpha^{(m)} = \iint_{S'_1} (w_\beta^{(m)}\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta} - G_{\alpha\beta}T^{(m)}{}_{\cdot\gamma}^{\beta})\,dS^\gamma + \iint_{S''_2} \psi_\beta\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}dS^\gamma + \iint_{S''_2} \chi_\beta\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}\,dS^\gamma, \tag{14}$$

et la fonction $u_\alpha^{(m-1)}$ dans le domaine D_1 s'exprime par

$$u_\alpha^{(m-1)} = -\iint_{S'_1} (w_\beta^{(m)}\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta} - G_{\alpha\beta}T^{(m)}{}_{\cdot\gamma}^{\beta})\,dS^\gamma + \iint_{S''_1} \psi_\beta\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}\,dS^\gamma + \iint_{S''_2} \chi_\beta\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}dS^\gamma. \tag{15}$$

Ici $T^{(m)\alpha\beta}$ est la tension qui correspond aux déplacements $w^{(m)}_\beta$ c'est-à-dire le tenseur qui s'exprime par

$$T^{(m)\alpha\beta} = \lambda\nabla^\gamma w_\gamma^{(m)}\delta^{\alpha\beta} + \mu(\nabla^\alpha u^{(m)\beta} + \nabla^\beta u^{(m)\alpha}), \tag{16}$$

et $\Gamma^{\alpha\beta\gamma}$—la tension qui correspond aux déplacements $G^{\alpha\beta}$ pour α fixe, c'est-à-dire,

$$\Gamma^{\alpha\beta\gamma} = \lambda\nabla^\delta G^{\alpha\delta}\delta^{\beta\gamma} + \mu(\nabla^\beta G^{\alpha\gamma} + \nabla^\gamma G^{\alpha\beta}). \tag{17}$$

En effet, les fonctions $u_\beta^{(m)}$ et $u_\beta^{(m-1)}$ définies par (14) et (15) satisfont évidemment aux conditions (2). Leur différence dans D_{12} coïncide avec $w_\beta^{(m)}$ et elles sont régulières dans les domaines correspondants. Mais une telle décomposition de $w_\beta^{(m)}$ est unique car elle est définie à une fonction près qui est régulière dans D'_{12} et s'annule sur son contour. Donc (14) et (15) sont démontrées. De ces formules il résulte que $u_\alpha^{(m)}$ et $u_\alpha^{(m-1)}$ tendent vers la même limite:

$$\lim u_\alpha^{(m)} = \iint_{S'_1} \psi_\beta\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}\,dS^\gamma + \iint_{S'_2} \chi_\beta\Gamma_{\alpha\cdot\gamma}^{\cdot\beta}\,dS^\gamma. \tag{18}$$

Or il est connu que cette limite donne la solution du premier problème que nous avons énoncé.

Le procédé que l'on doit employer pour résoudre le second problème est analogue. Il faut construire la suite de fonctions $\varphi_\beta^{(n)}$ qui est déterminée de la manière suivante.

Toutes les fonctions $\varphi_\beta^{(2k)}$ sont régulières dans D_2 et D_1' et satisfont dans ces domaines au système (1). Elles sont continues dans D_{12}'. D'ailleurs elles satisfont aux conditions suivantes:

$$\varphi_\beta^{(0)}\big|_{s_2'} = \chi_\beta; \quad \varphi_\beta^{(0)}\big|_{s_2''} = \omega_\beta; \quad \varphi_\beta^{(0)}\big|_{s_1''} = \lambda_\beta, \tag{19}$$

où ω_β et λ_β sont deux fonctions suffisamment régulières et coïncidant avec γ_β et ψ_β sur l:

$$\varphi_\beta^{(2k)}\big|_{s_2'} = \varphi_\beta^{(2k-1)}\big|_{s_2'}; \quad \varphi_\beta^{(2k)}\big|_{s_2''} = 0; \quad \varphi_\beta^{(2k)}\big|_{s_1''} = 0 \quad k \geqslant 1. \tag{20}$$

Toutes les $\varphi_\beta^{(2k+1)}$ sont continues dans D_{12}', régulières dans D_1 et D_2', et satisfont à l'intérieur de ces domaines au système (1) et sur le contour aux conditions:

$$\varphi_\beta^{(1)}\big|_{s_1'} = -\psi_\beta + \varphi_\beta^{(0)}\big|_{s_1'}; \quad \varphi_\beta^{(1)}\big|_{s_1''} = 0; \quad \varphi_\beta^{(1)}\big|_{s_2''} = 0; \tag{21}$$

$$\varphi_\beta^{(2k+1)}\big|_{s_1'} = \varphi_\beta^{(2k)}\big|_{s_1'}; \quad \varphi_\beta^{(2k+1)}\big|_{s_1''} = 0; \quad \varphi_\beta^{(2k+1)}\big|_{s_2''} = 0 \quad k \geqslant 1. \tag{22}$$

On peut établir d'une façon analogue que $\varphi_\beta^{(n)}$ tend vers zéro dans D_{12}'. Il en résulte que la série

$$\varphi_\beta = \varphi_\beta^{(0)} - \varphi_\beta^{(1)} + \varphi_\beta^{(2)} - \ldots + (-1)^n \varphi_\beta^{(n)} + \cdots \tag{23}$$

converge régulièrement sur son contour.

Cette série étant convergente sur le contour elle doit converger aussi à l'intérieur du domaine et sa somme est la solution de notre second problème.

On peut appliquer le même raisonnement pour un domaine infini. Il est utile de remarquer que dans ce cas la fonction de Green $G^{\alpha\beta}$ doit satisfaire à quelques conditions correspondant au point á l'infini. Par exemple, si D_{12}' coïncide avec tout l'espace, $g^{\alpha\beta}$ doit être nulle. Les mêmes principes permettent de démontrer la convergence du procédé dans plusieurs autres cas, par exemple, pour la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation elliptique même-adjointe aux coefficients variables, le problème biharmonique fondamental, etc. Le nombre des domaines qui servent à construire le domaine en question est de même sans importance.

Institut Séismologique de l'Académie
des Sciences de l'URSS, Moscou

Manuscrit reçu
le 10. X. 1936

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

MATHEMATICS

NOTE ON SOME INFINITE INTEGRALS

By N. KOŠLIAKOV (N. KOSHLIAKOV), Corresponding Member of the Academy

In the present note I propose to point out some applications of the summation formulae concerning sums of the following form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) f(n),$$

where $\tau(n)$ denotes the numbers of divisors of n.

By the method set forth by me in the note «On a General Summation Formula and its Application» (1), it is possible to prove that, under certain conditions imposed upon the function $f(x)$, the following formula holds

$$\sum_{1}^{\infty} \tau(n) f(n) = R + \int_{0}^{\infty} f(x)(2\gamma + \log x)\, dx + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\Phi\left(\frac{1}{2} + it\right) + \Phi\left(\frac{1}{2} - it\right)}{2} \frac{\Xi^2(t)\, dt}{\left(t^2 + \frac{1}{4}\right)^2}, \qquad (1)$$

where

$$\Xi(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad \xi(s) = \frac{\pi^{-\frac{s}{2}}}{2} s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

$$\Phi(s) = \frac{4\pi^s}{\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} f(x)\, x^{s-1} dx$$

and where R is the sum of the residues of the function

$$\frac{\pi^{-s}}{4} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \Phi(s)$$

at those poles which are inside the rectangle whose corners are $A(\tau + i\infty)$, $B\frac{1}{2}\left(+i\infty\right)$, $C\left(\frac{1}{2} - i\infty\right)$, $D(\tau - i\infty)$, $\tau > 1$.

In the special case in which

$$f(x) = 2\int_0^\infty \tau J_0(2\pi\rho\tau)\left\{K_0(4\pi\varepsilon\sqrt{x\tau}) + K_0(4\pi\bar{\varepsilon}\sqrt{x\tau})\right\} d\tau,$$

where $\varepsilon = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $\bar{\varepsilon} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$, $\rho = e^{-2\alpha}$, we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{it}{2}\right)\right|^4 \operatorname{ch}\frac{\pi t}{2} \cos \alpha t\, \Xi^2\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2(2\pi)^{\frac{7}{2}} \Psi(\alpha), \tag{2}$$

where

$$\Psi(\alpha) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{-3\alpha} \int_0^\infty x J_0(2\pi x e^{-2\alpha}) \left\{\sigma(x) + \frac{1}{4\pi x}\right\} dx, \tag{3}$$

and

$$\sigma(x) = 2\sum_1^\infty \tau(n)\left\{K_0(4\pi\varepsilon\sqrt{nx}) + K_0(4\pi\bar{\varepsilon}\sqrt{nx})\right\} =$$

$$= -\gamma + \log x - \frac{1}{4\pi x} + \frac{x}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\tau(n)}{x^2 + n^2}. \tag{4}$$

This result may be also deduced from Formula (24) of my paper «Some Integral Representations of the Square of Riemann's Function $\Xi(t)$» (2), if Fourier's Integral be applied to it.

As shown by me in the paper mentioned above, the function $\Psi(\alpha)$ is possessed of the property of being invariant. We will point out yet another infinite integral containing the function $\sigma(x)$ and possessed of a similar invariant property. In my note «On Some Summation Formulae Connected with the Theory of Numbers (1)» (3) I have proved the formula:

$$\int_0^\infty J_0(4\pi\sqrt{\rho x})\left\{\sigma(x) + \frac{1}{4\pi x}\right\} dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\sigma(\rho) + \frac{1}{4\pi\rho}\right\}. \tag{5}$$

Multiplying both members of this equality by $e^{-\alpha\rho}$ and integrating with respect to ρ from $\rho = 0$ up to $\rho = \infty$, we get the desired result

$$\sqrt{a}\int_0^\infty e^{-ax}\left\{\sigma(x) + \frac{1}{4\pi x}\right\} dx = \sqrt{b}\int_0^\infty e^{-bx}\left\{\sigma(x) + \frac{1}{4\pi x}\right\} dx, \tag{6}$$

where

$$ab = 4\pi^2.$$

It should be mentioned that a result analogous to Poisson's classical integral may be derived from formula (4) of the above mentioned note. Putting in this formula $f(x) = \frac{1}{(1+x)^s}$ and assuming that s tends to unity, we obtain the following integral

$$2\int_0^\infty \frac{x\sigma(x)}{1+x^2}\, dx = \gamma^2 - 2\gamma_1 - \frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{6} + \sum_1^\infty \tau(n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \tag{7}$$

where

$$\gamma_1 = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log 2}{2}+\frac{\log 3}{3}+\ldots+\frac{\log n}{n}-\frac{\log^2(n+1)}{2}\right\}.$$

Expressions of the type of formula (6) are analogous to identities established by Ramanujan and Hardy. It is possible to point out yet another identity relating to this domain. In this identity no relation exists between the parameters a and b. For this purpose, we multiply both members of Legendre's integral:

$$2\int_0^\infty \sin 2\pi\rho x\left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1}-\frac{1}{2\pi x}\right\}dx=\frac{1}{e^{2\pi\rho}-1}-\frac{1}{2\pi\rho}, \tag{8}$$

by $e^{-\frac{ia\pi}{b}\rho^2}\sin 2a\pi\rho$ and then integrate with respect to ρ from $\rho=0$ to $\rho=\infty$; we get the following expression:

$$\sqrt{a}\,e^{\left(\frac{3}{8}-\frac{ab}{2}\right)\pi i}\int_0^\infty e^{-\frac{ia\pi}{b}x^2}\sin 2\pi ax\left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1}-\frac{1}{2\pi x}\right\}dx=$$

$$=\sqrt{b}\,e^{-\left(\frac{3}{8}-\frac{ab}{2}\right)\pi i}\int_0^\infty e^{\frac{ib\pi}{a}x^2}\sin 2\pi bx\left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1}-\frac{1}{2\pi x}\right\}dx. \tag{9}$$

In conclusion it should be noted that Legendre's integral may be made use of for a simple deduction of the functional equation of Riemann's function $\zeta(s)$*. For this purpose, the well-known formula:

$$\zeta(s)=\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty x^{s-1}\left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1}-\frac{1}{2\pi x}\right\}dx,\quad 0<R(s)<1, \tag{10}$$

should be taken into consideration.

Multiplying now both members of integral (8) by ρ^{s-1} where $0<R(s)<1$, and integrating with respect to ρ from $\rho=0$ to $\rho=\infty$, we get the equality:

$$\zeta(s)\,\Gamma(s)=\frac{\pi}{\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(1-s)}\int_0^\infty x^{-s}\left\{\frac{1}{e^{2\pi x}-1}-\frac{1}{2\pi x}\right\}dx. \tag{11}$$

In virtue of (10), Riemann's classical equation may be obtained from the equality:

$$\zeta(1-s)=\frac{2\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s)}{(2\pi)^s}. \tag{12}$$

---

* I do not venture to assert that the deduction of equation (12) set forth above is new; however, no mention is made either in Bohr-Cramer's paper in Enzyklopädie der Math. Wissensch. (Bd. II_3, H. 6), or in the Ingham's well-known book. I publish this deduction in view of its simplicity exclusively.

Hurwitz's equation for the generalized Riemann's function

$$\zeta(s,\ w) = \frac{1}{(w+1)^s} + \frac{1}{(w+2)^s} + \cdots$$

may be obtained by a method analogous to that set forth above.

Institute of Mathematics
and Mechanics
Leningrad State University

Received
25 X 1936

REFERENCES

[1] N. Koshliakov, C. R. Acad. Sci. URSS, IV, 4 (1934). [2] N. Koshliakov, C. R. Acad. Sci. URSS, II, 7 (1934). [3] N. Koshliakov, C. R. Acad. Sci. URSS, III, 6 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

MATHEMATICS

GENERALIZED WARING'S PROBLEM IN CONNECTION WITH THE ESTIMATION OF TRIGONOMETRICAL SUMS

By B. SEGAL

(Communicated by I. M. Vinogradow, Member of the Academy, 25. X. 1936)

We have considered in some previous papers [1, 2, 3] the generalized Waring's problem. In the last of them [3] we have received the result which is equivalent to the estimation of $G(k)$ in the usual Waring's problem due to Hardy and Littlewood. This result may be stated as follows.

Let c be a real but not an integral number > 1; $n = [c] + 1$; $c' = n - c$; N denotes any real number greater than a certain constant C. For the number of solutions I_N of the equation:

$$N = a + \sum_{\lambda=1}^{r} x_\lambda^c, \tag{1}$$

where x_λ are integral and a satisfies the condition:

$$|a| < \Delta \sim N^{-\frac{\alpha}{c}},$$

we have the formula:

$$I_N = 2\,\frac{\Gamma^r\left(1+\frac{1}{c}\right)}{\Gamma\left(\frac{r}{c}\right)} N^{\frac{r-\alpha}{c}-1} + O\left(N^{\frac{r-\alpha-\gamma}{c}-1}\right), \tag{2}$$

where $r > r_0$ and γ is a certain positive number. We received for r_0 and α the following values:

$$1)\quad r_0 = \left[\frac{c\,(2^n-2)}{c'}\right] + 1 = \frac{c\,(2^n-2)}{c'} + \varepsilon', \qquad 0 < \varepsilon' \leqslant 1,$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon' c' r_0}{(r_0 + 2^n - 2)^2};$$

or

$$2)\quad r_0 = \left[\frac{c\,(2^{n+1}-2)}{1+c'}\right] + 1 = \frac{c\,(2^{n+1}-2)}{1+c'} + \varepsilon'', \qquad 0 < \varepsilon'' \leqslant 1,$$

$$\alpha = \frac{\varepsilon''(1+c')r_0}{(r_0 + 2^{n+1} - 2)^2};$$

$$3)\quad r_0 = (h-2)2^{h-1} + 3,$$

where h is integral and $\geqslant n+2$,

$$\alpha = h - c - 2.$$

The values 1) for r_0 and α are to be taken when c' is near to unity; the values 2) for r_0 and α are to be taken when c' is near to zero. If we put the question about the approximation of the sum

$$\sum_{\lambda=1}^{r} x_\lambda^c$$

to the number N such that the error a will be less than a given positive quantity, we use the values 3) for r_0 and α. In the following we shall always give three values for r_0 and α corresponding to these three cases.

The result stated here depends on the exactness of the estimation of trigonometrical sums of the form:

$$\sum_{A \leqslant x \leqslant B} e^{2\pi i f(x)}, \tag{3}$$

where $B > A > 0$, $f(x) = zx^c$ and z is positive. I. Vinogradow received recently new general and profound results concerning the estimation of sums (3), where $f(x)$ is a polynomial with real coefficients or a real function which can be approximated exact enough by a polynomial. Therefore it seems to be important to state a general relation between the solution of the extended Waring's problem and the estimation of the sums (3). This is necessary because the results due to I. Vinogradow can be improved in the future, though the improvement is connected by overcoming of significant difficulties.

We have received in this connection a result which may be stated as follows, if we use the notations introduced above.

Let k and k_1 be positive integral numbers $\geqslant 2$; $U = B - A > 0$; σ_k and ρ_k are real functions defined for all positive integral k and satisfy for every $k \geqslant k_1$ the condition $\sigma_k < \rho_k$.

Further, let $f(x)$ have in the interval $A \leqslant x \leqslant B$ k derivates $f'(x)$. $f''(x), \ldots, f^{(k)}(x)$; $f^{(k)}(x)$ is in this interval positive or negative and satisfies the condition

$$V^{-1} \leqslant f^{(k)}(x) \leqslant lV^{-1},$$

where l is constant, V does not depend on x and

$$0 < V \leqslant U^2.$$

Suppose that

$$\sum_{A \leqslant x \leqslant B} e^{2\pi i f(x)} = O(UV^{-\sigma_k}) \tag{4}$$

if $k > 2$ and

$$\sum_{A \leqslant x \leqslant B} e^{2\pi i f(x)} = O(UV^{-\rho_k}) \tag{5}$$

if $k \geqslant k_1$. Then by application of the method stated in our papers mentioned above, we proved that for any $c > k_1 - 1$ the asymptotical formula (2) for the number of representations of N in the form (1) holds, if

$$r_0 = \left[\frac{c}{c'\rho_n}\right] + 1 = \frac{c}{c'\rho_n} + \varepsilon', \qquad 0 < \varepsilon' \leqslant 1,$$

and

$$\alpha = \frac{\varepsilon' c' r_0 \rho_n^2}{(r_0 \rho_n + 1)^2}, \tag{6}$$

or if

$$r_0 = \left[\frac{c}{(c'+1)\rho_{n+1}}\right] + 1 = \frac{c}{(c'+1)\rho_{n+1}} + \varepsilon'', \qquad 0 < \varepsilon'' \leqslant 1,$$

and

$$\alpha = \frac{\varepsilon''(c'+1) r_0 \rho_{n+1}^2}{(r_0 \rho_{n+1} + 1)^2}, \tag{7}$$

or if

$$r_0 = \left[\frac{h-1}{\rho_h}\right] + 1, \qquad h \geqslant n+1$$

and

$$\alpha = h - c - 1. \tag{8}$$

We can receive directly with help of this result the solution of the generalized Waring's problem corresponding to a given estimation of the sum (3).

Thus by application of the new Vinogradow's method van der Corput stated in a letter to Vinogradow that for $k \geqslant 4$ the formula (5) holds if

$$\rho_k = \frac{2(k-2-t)}{3(k-2)(k-1)(k+1)\left(\frac{1}{t} + (k-1)\log\frac{k(k-1)}{2t}\right)},$$

where $0 < t < k-2$. We put here $t = 1$ and find without difficulty that for $k \geqslant 16$ this value for ρ_k can be replaced by

$$\rho_k = \frac{1}{4k^3 \log k}.$$

If we take the old estimation (4) where

$$\sigma_k = \frac{1}{2^k - 2}$$

which can be find for instance in one of van der Corput's papers [5], we receive $k_1 = 16$. Therefore, for $c > 15$ we find the following three values for r_0 corresponding to the three cases mentioned above:

1) $r_0 = \left[\frac{4cn^3 \log n}{c'}\right] + 1,$

2) $r_0 = \left[\frac{5cn^3 \log n}{c'}\right] + 1,$

3) $r_0 = [4(h-1)n^3 \log n] + 1, \qquad h \geqslant n+1.$

The corresponding values for α we can find easily with help of the formulas (6), (7) and (8).

V. Stekloff Institute of Mathematics
of the Academy of Sciences of the USSR
Moscow

Received
25. X. 1936

REFERENCES

[1] B. Segal, C. R. Acad. Sci. URSS, No 2, 47—49 (1933). [2] B. Segal, Trav. Inst. phys. math. Stekloff, 5, 73—86 (1934). [3] B. Segal, Annals of Math., **36**, 507—520 (1935). [4] I. Vinogradow, Recueil Mathém., **1 (43)**: 2, 175—188 (1936). [5] I. G. van der Corput, Math. Zeitschrift, **29**, 401 (1929).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

MATHÉMATIQUES

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DES FONCTIONNELLES LINÉAIRES

GR. FICHTENHOLZ

(Présenté par S. N. Bernstein, de l'Académie, le 20. VI. 1936)

§ 1. Une définition de convergence (σ)* est appelé n o r m a l e, si l'on peut la considérer comme «convergence par la norme», grâce à une normalisation convenable de l'espace $X = \{x\}$. On ne supposera pas dans la suite que l'espace X est c o m p l e t.

Nous nous proposons de chercher un critère qui permettrait d'établir, si une définition de connvergence (σ) donnée est normale ou non.

Ce critère s'exprimera en termes de la famille des fonctionnelles linéaires $F_\sigma = \{f\}$ qui est engendrée par la convergence (σ). Notamment, il nous faudra de toute famille de fonctionnelles $f \in F_\sigma$, ne différant que par des facteurs constants, choisir un «représentant» $\hat{f}$ et de considérer la famille partielle $\hat{F} = \{\hat{f}\}$, ainsi composée. On aura le théorème:

Pour que la définition de la convergence (σ) *soit normale, il faut et il suffit que l'on puisse former la famille* F *de manière à satisfaire aux conditions suivantes:*

1) quel que soit $x \in X$, les nombres $\{\hat{f}(x)\}$ sont bornés dans leur ensemble**, et

2) de $x_n \xrightarrow{\sigma} 0$ il suit que $\hat{f}(x_n)$ converge vers zéro *uniformément pour tous les* $f \in F$, *et réciproquement.*

Ces conditions étant remplies, on peut normaliser l'espace X en prenant:

$$\| x \| = \sup_f |\hat{f}(x)|.$$

Dans le cas d'une convergence régulière, on pourrait omettre dans l'énoncé du théorème les mots: «et réciproquement».

C'est l'application de ce critère à la démonstration du fait qu'une définition de convergence donnée n'est pas normale que présente le plus

---

* Pour la terminologie, les notations et les conventions, voir ma Note précédente (1).

** Si la définition (σ) est telle que $b_n \to 0$ entraîne $b_{n\alpha} \xrightarrow{n} 0$, quel que soit $x \in X$, la première condition devient superflue, car dans ce cas elle est une conséquence de la seconde.

grand intérêt. Considérons, p. e., l'espace s (de M. Fréchet) dont les éléments sont des suites de nombres réels: $x = (\xi^{(i)})$. On y définit d'habitude la convergence comme il suit:

(ε) $\left\{\begin{array}{l} \{x_n\} \text{ converge vers } x, \text{ si pour } n \to \infty \text{ chacune des «coordonnées»} \\ \xi_n^{(i)} \text{ de l'élément } x_n \text{ converge vers la «coordonnée» respective } \xi^{(i)} \\ \text{de l'élément } x. \end{array}\right.$

Cette convergence engendre la famille de fonctionnelles:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{i=h} c_i \xi^{(i)}. \qquad (*)$$

Supposons qu'on choisit comme «représentant» des fonctionnelles $c\xi^{(i)}$ la fonctionnelle $\hat{f}_i(x) = \hat{c}_i \cdot \xi^{(i)}$. Il suffit de prendre la suite $\{x_n\}$ telle que l'on ait:

$$\xi_n^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\hat{c}_i}, & si \quad i = n, \\ 0, & si \quad i \neq n, \end{cases}$$

pour que la condition 2) ne soit pas remplie. Donc, la convergence (ε) n'est pas normale *.

Dans bien des cas on peut utiliser le critère particulier que voici:

Supposons que la famille $F_c = \{f\}$, *engendrée par la définition de la convergence* (σ), *peut être normée comme un espace indépendant de manière*

1) *qu'elle devienne un espace complet (ou de seconde catégorie en soi) et*

2) *que si* $x_n \overset{\sigma}{\to} 0$, *alors pour toutes les fonctionnelles* f *dont les normes (comme éléments de l'espace* F_c*) sont bornées dans leur ensemble:* $\|f\| \leqslant M$, *les valeurs* $f(x_n)$ *le sont également*:

$$|f(x_n)| \leqslant L_M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dans ces conditions pour que la convergence (σ) *soit normale, il faut que* $x_n \overset{\sigma}{\to} 0$ *implique la convergence de* $f(x_n)$ *vers zéro, uniforme pour tous les* f *dont les normes sont bornées dans leur ensemble:* $\|f\| \leqslant M$.

A l'aide de ce critère on peut établir que les convergences (α), (β^*), (γ^*), (δ) que j'ai étudié dans le § 3 de ma Note précédente (1) ne sont point normales.

§ 2. Jusqu'à présent nous avons pris pour point de départ une définition de convergence donnée et nous avons cherché, si cette convergence est normale ou non. Maintenant nous supposons qu'une famille $F = \{f\}$ de fonctionnelles linéaires est donnée. En supposant qu'elle peut être engendrée, en général, par une convergence normale, cherchons tout d'abord, en quelle mesure cette convergence est définie d'une manière univoque. Il est aisé de démontrer le théorème:

Si la convergence, se rattachant à la norme $\|x\|_1$, *engendre la famille de fonctionnelles* F *et si en même temps toutes les fonctionnelles* $f \in F$ *sont continues dans le sens d' une autre convergence liée avec la norme* $\|x\|_2$, *on aura, pour tous les* $x \in X$,

$$\|x\|_2 \geqslant \lambda \cdot \|x\|_1 \qquad (\lambda = \text{const}, \ \lambda > 0).$$

---

* M. Banach a indiqué dans son livre (2) que ce résultat a été déjà établi par Mazur.

En effet, $\|x_n\|_2 \to 0$ implique $f(x_n) \to 0$ pour $f \in F$, donc les normes $\|x_n\|_1$ sont bornées dans leur ensemble, en vertu d'un théorème connu de Banach [(²), p. 133]. On en déduit le résultat plus précis: $\|x_n\|_1 \to 0$, ce qui prouve le théorème.

En voici un corollaire qui résout complètement la question proposée:

Si les convergences se rattachant à la norme $\|x\|_1$, resp. $\|x\|_2$, engendrent toutes les deux la même famille de fonctionnelles F, on aura, pour tous les $x \in X$,

$$\Lambda \|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \lambda \cdot \|x\|_1, \qquad (\Lambda, \lambda = \text{const}, \lambda > 0)$$

de sorte que les dites convergences sont topologiquement équivalentes.

§ 3. Nous allons traiter maintenant la question importante suivante: une famille F de fonctionnelles linéaires étant donnée, peut-elle ou non être engendrée par une convergence normale?

Voici d'abord un critère particulier qui permet de résoudre cette question par la négative dans certains cas:

Supposons que la famille $F = \{f\}$ est linéaire et qu'on peut la normer comme un espace indépendant de façon 1) qu'elle devienne un espace complet (ou de seconde catégorie en soi) et 2) que $\|f_n\| \to 0$ entraîne $f_n(x) \to 0$ pour tous les $x \in X$.

Alors, pour que la famille F puisse être engendrée par une convergence normale, la condition suivante est nécessaire: pour chaque suite $\{f_n(x)\}$ de fonctionnelles appartenant à F, dont les normes $\|f_n\|$ sont uniformément bornées, il existe toujours une fonctionnelle $f \in F$ telle que

$$\lim_n f_n(x) \leq f(x) \leq \overline{\lim_n} f_n(x).$$

C'est ce critère qui permet d'établir, p. e., qu'aucune des quatre familles de fonctionnelles linéaires, étudiées dans le § 3 de ma note citée (¹), ne peut être engendrée par une convergence normale.

§ 4. Les considérations auxiliaires qui suivent ouvrent une voie pour la résolution générale de la question, proposée au paragraphe précédent.

1°. Parmi toutes les diverses définitions de convergence, dans le sens desquelles les fonctionnelles de la famille F donnée sont continues, nous allons distinguer d'abord les définitions (α) qui possèdent la propriété suivante:

(Λ) si $x_n \xrightarrow{\alpha} 0$, il existe une suite croissante $\{a_n\}$ de nombres réels tendant vers l'infini, telle que l'on a également $a_n x_n \xrightarrow{\alpha} 0$.

On démontrera facilement que:

parmi les définitions indiquées de convergence (α), il existe toujours une définition de convergence (λ) qui est la plus large; elle peut d'ailleurs être formulée explicitement en termes de la famille donnée de fonctionnelles:

(λ) *$\{x_n\}$ converge vers 0, s'il existe une suite croissante $\{a_n\}$ de nombres réels tendant vers l'infini, telle que $a_n f(x_n) \to 0$ pour tous les $f \in F$.*

2°. Soit (β) une définition de convergence. Nous dirons [suivant Banach (³)] que la suite $\{x_n\}$ est «β-bornée», si l'on a toujours $b_n x_n \xrightarrow{\beta} 0$ quelle que soit la suite $\{b_n\}$ de nombres réels convergeant vers zéro.

Considérons de nouveau les définitions de la convergence, dans le sens desquelles toutes les fonctionnelles de la famille F sont continues,

et considérons maintenant les définitions (β) qui jouissent de la propriété suivante:

(B) { si $f(x_n) \to 0$ pour toutes les fonctionnelles $f \in F$, la suite $\{x_n\}$ est β-bornée.

Alors on aura la proposition:

parmi ces définitions de la convergence (β), *il existe toujours une définition qui est la plus étroite; elle coïncide avec la définition* (λ) *précédemment indiquée.*

3°. Donc, parmi toutes les convergences, dans le sens desquelles les fonctionnelles $f \in F$ sont continues, la convergence (λ) est la seule qui possède les propriétés (A) et (B) simultanément.

Or, si la famille F peut être engendrée par une convergence normale (ν), cette convergence jouit forcément de la propriété (A) (ce qui est évident), ainsi que de la propriété (B)—ce qui résulte du théorème cité de Banach [(2), p. 133]. Par conséquent, la convergence (ν) n'est autre chose que (λ). (On retrouve ainsi les propositions du § 2).

Donc, la convergence (λ) qu'on peut toujours déterminer d'une manière précise joue le rôle d'une convergence «résolvante» sui generis: ou bien (λ) est exactement la convergence normale qui engendre la famille F, ou bien, une telle convergence n'existe pas. Le problème, posé dans le § 3, se réduit donc essentiellement à celui qu'on a étudié au § 1.

Revenons, p. e., à l'espace $\overline{s}$ de M. Fréchet. Comme la convergence (ε) est régulière et possède elle-même la propriété (A), elle est précisément la convergence (λ). Or, nous avons vu que cette convergence n'est pas normale. Mais à present nous pouvons ajouter qu'il n'existe aucune convergence normale qui peut engendrer la famille des fonctionnelles (*), considérée dans le § 1.

Quelquefois la convergence (λ) se trouve normale, mais elle engendre une famille plus large que la famille F donnée. Considérons, p. e., encore une fois la famille des fonctionnelles dans l'espace M, étudié dans le § 3 de ma Note citée:

$$f(x) = \int_a^b x(t)\varphi(t)\,dt.$$

En tenant compte d'un théorème de H. Lebesgue (4), il est aisé de voir que dans ce cas la convergence (λ) est normale et se rattache à la définition de la norme que voici:

$$\|x\| = \operatorname*{vrai\,max}_{a \le t \le b} |x(t)|.$$

Or, il est connu (5) que cette convergence engendre une famille de fonctionnelles beaucoup plus vaste. Par conséquent, la famille considérée ne peut être engendrée par aucune convergence normale.

Il est aisé d'établir de même (v. § 3) des résultats analogues, relatifs aux autres familles, considérées dans ma Note précédente.

Institut de Mathématiques et de Mécanique.
Université de Léningrad.

Manuscrit reçu le
20. VI. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] Gr. Fichtenholz, C. R. Acad. Sci. URSS, v. IV, No 5 (1936). [2] C. Banach, Théorie des opérations linéaires, p. 233. Warszawa, (1932). Voir: S. Mazur und W. Orlicz, Stud. Math., t. IV, p. 152 (1933). [4] H. Lebesgue, Annales de Toulouse, sér. 3, t. I, p. 52—54 (1909). [5] Gr. Fichtenholz et L. Kantorowitch, C. R. Acad. Sci. URSS, t. III, pp. 310—311 (1934), ou Stud. Math., t. V, p. 76 (1935); v. aussi: T. H. Hildebrandt, Trans. Americ. M. S., v. 36, p. 872 (1934).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

PHYSIK

BEEINFLUSSUNG DER VERTEILUNG VON RESTSPANNUNGEN ERSTER ART IN EINEM ZYLINDER DURCH DAS ZERSCHNEIDEN

Von M. P. ŽELDAK

(Vorgelegt von A. Ioffé, Mitglied der Akademie, d. 19. X. 1936)

In den letzten Jahren erschien eine Reihe von Arbeiten über die Bestimmung von Restspannungen auf mechanischem Wege in Körpern von rundem Querschnitt (1).

Wie bekannt, werden zur Ermittlung der Spannungen auf mechanischem Wege vom zylindrischen Körper Scheiben (Ringe) und Streifen abgeschnitten. Man bestimmte die Spannungen im Ring oder in der Scheibe und schloss daraus auf die Restspannungen im ganzen Körper.

Jedoch waren solche Schlussfolgerungen nicht genügend begründet, da experimentell noch nicht untersucht worden ist, wie das Zerschneiden des Stückes die Grösse und die Richtung der Restspannungen beeinflusst. Es ist auch nicht festgestellt, inwieweit die an Scheiben bestimmten Spannungen ein Bild der tatsächlichen Spannungen darstellen, die vor dem Zerschneiden des Stückes bestanden haben. In einer früher veröffentlichten Mitteilung(2) ist die Anwendung des röntgenographischen Verfahrens von Wever-Möller (3) zur Ermittlung der Restspannungen erster Art an Zylindern geschildert worden, die von einer Temperatur von 650° in Wasser abgeschreckt wurden. Zur Untersuchung der Spannungen wurden vom Zylinder Scheiben von einer Dicke von 10 mm abgeschnitten. Die Spannungen wurden in einer zur Zylinderachse senkrechten Ebene untersucht. Die Röntgenogramme wurden mit einer Sachs-Wertsschen Kammer aufgenommen, und zwar bei jeder Scheibe an acht Stellen, welche längs eines Radius der Scheibe im Abstand von je 3 mm voneinander lagen.

Die erhaltenen Röntgenogramme gestatten eine Messung der Formänderung des Kristallgitters nur in der Richtung der Zylinderachse, die durch die Gleichung (1) ausgedrückt wird:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{E}(\sigma_t + \sigma_r), \qquad (1)$$

wo ε die röntgenographisch gemessene Gitterformänderung darstellt, μ — die Poissonsche Zahl, E — den Jungschen Modul, σ_t — die tangentiale und σ_r — die radiale Spannung. Aus der Gleichung (1) ist ersichtlich, dass auf röntgenographischem Wege nur die Summe der Hauptspannungen bestimmt wer-

den kann, die in der Schnittebene liegen; die Richtung und der Wert der Hauptspannungen im einzelnen bleiben unbekannt.

Im Laufe der weiteren Untersuchung wurde von uns nachgewiesen, dass bei den langen Zylindern die Gitterformänderung nicht allein durch tangentiale und radiale, sondern auch durch achsiale, zur untersuchten Ebene normale Spannungen bedingt wird (4). In diesem Fall wird die gemessene Formänderung durch die Gleichung (2) bestimmt:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}[-\mu(\sigma_t + \sigma_r) + \sigma_l], \qquad (2)$$

wo σ_l die achsiale Spannung bedeutet. Wenn wir also von einem langen Zylinder (Länge 130 mm, Durchmesser 50 mm) mit räumlichen Restspannungen ausgehen, seine Länge schrittweise verkleinern und jedesmal die Kristallgitterformänderung messen, so können wir die Abhängigkeit der achsialen Spannungen von der Länge des Zylinders feststellen (vorausgesetzt, dass die tangentialen und die radialen Spannungen beim Zerschneiden nicht geändert werden).

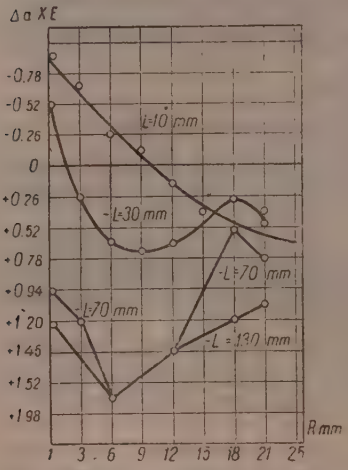


Abb. 1. Die Abhängigkeit der Kristallgitterformänderung in der Randschicht von den Achsialspannungen.

Auf der Abbildung 1 ist die Änderung der Kristallgitterformänderung in der Randschicht dargestellt, in Abhängigkeit von der Länge des abgeschnittenen Zylinderteils. Die Kurven (Abb. 1) berechtigen uns zu einigen Folgerungen. Vor allem hängt der Wert der Achsialspannungen von der Länge des abgeschnittenen Zylinderteils ab. In einer 10 mm dicken Scheibe können die Achsialspannungen gleich Null angenommen werden. In einem abgeschnittenen 30 mm hohen Zylinderteil bleiben die Achsialspannungen zum Teil erhalten. Bei einer Länge von 70 mm und mehr, bleiben die Achsialspannungen völlig bestehen.

Bei der Auswertung der erhaltenen Ergebnisse entsteht natürlich die Frage, auf welche Weise das Zerschneiden des Zylinders senkrecht zu dessen Achse die tangentialen und radialen Spannungen beeinflusst.

Um diese Frage aufzuklären, wurden die tangentialen und radialen Spannungen nach dem mechanischen Verfahren von S a c h s bestimmt. Zur Ermittlung wurden vom gleichen Zylinder eine 5 mm dicke Scheibe und ein 50 mm langer Zylinder abgeschnitten, in welchem nach obigem die Achsialspannungen teilweise erhalten geblieben waren.

Die Messung der Formänderung beim Bohren des Zylinders und der Scheibe wurde mit einem Optimeter der Firma Zeiss mit einer Genauigkeit bis 0.001 mm durchgeführt. Im Zylinder wurden die Spannungen nach den Gleichungen (3), (4) ermittelt, die die Achsialspannungen berücksichtigen:

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(f_b - f)\frac{d(\vartheta + \mu\lambda)}{df} - \frac{f_b + f}{2f}(\vartheta + \mu\lambda)\right], \qquad (3)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \frac{f_b - f}{2f}(\vartheta + \mu\lambda). \qquad (4)$$

In den Scheiben wurden sie nach den Gleichungen (5), (6), ohne Berücksichtigung der Achsialspannungen, bestimmt (1):

$$\sigma_t = E\left[(f_b - f)\frac{d\vartheta}{df} - \frac{f_b + f}{2f}\vartheta\right], \tag{5}$$

$$\sigma_r = E \cdot \frac{f_b - f}{2f}\delta. \tag{6}$$

In beiden Fällen haben die Bezeichnungen in den Gleichungen die folgende Bedeutung: f_b—die ursprüngliche Zylinderfläche, f—die durch das Bohren veränderte Zylinderfläche, λ—die relative Formänderung der Zylinderlänge, ϑ—die relative Formänderung des Durchmessers (1).

Beim Bohren wurde angenommen:

$$\mu = 0.3,\ E = 2 \cdot 10^4\ \text{kg}/\text{mm}^2,\ f_b = 1963.$$

Die Ergebnisse der Rechnungen sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt, ebenso auf den Abb. 2 und 3. Man sieht, dass die tangentialen und radia-

Tabelle 1

Die Tangential- u. Radial-Spannungen in einer Scheibe

(Dicke der Scheibe 5 mm, Durchmesser 50 mm)

f	$\vartheta \cdot 10^5$	σ_t	σ_r
28.27	1.12	—	—
78.53	4.0	13.3	9.1
176.71	7.3	7.0	8.3
314.1	18.3	3.5	10.7
490.87	26.3	— 0.2	8.9
706.85	35.7	— 2.6	6.6
962.11	42.4	— 8.5	5.1
1256.74	(45.4)	—11.0	3.4
1590.4	(54.9)	—12.5	1.3

Tabelle 2

Die Tangential- u. Radial-Spannungen in einem Zylinder

(Höhe 50 mm, Durchmesser 50 mm)

j	$\lambda \cdot 10^5$	$\vartheta \cdot 10^5$	$(\vartheta + \mu\lambda) \cdot 10^5$	σ_t	σ_r
19	16.8	4.4	9.4	—	—
78	5.3	1.6	3.2	14.0	8.8
176	6.6	6.0	8.0	10.0	9.2
314	8.5	14.6	18.8	3.5	10.2
490	10.6	18.8	22.0	0.0	7.6
706	9.4	33.6	36.4	— 2.5	6.7
962	12.4	34.8	38.5	— 7.0	4.4
1256	(12.2	(27.7)	(29.5)	— 8.0	2.1
1590	(20.6)	(41.2)	(44.2)	—10	1.2

len Spannungen in der Scheibe und im Zylinder in guter Übereinstimmung stehen. Also beeinflusst das Zerschneiden des Zylinders in Scheiben die

Grösse und Richtung der Tangential- und Radial-Spannungen nicht. Die an den abgeschnittenen Scheiben ermittelten Spannungen entsprechen, ihrer Grösse und ihrer Richtung nach, den Spannungen im ganzen Körper.

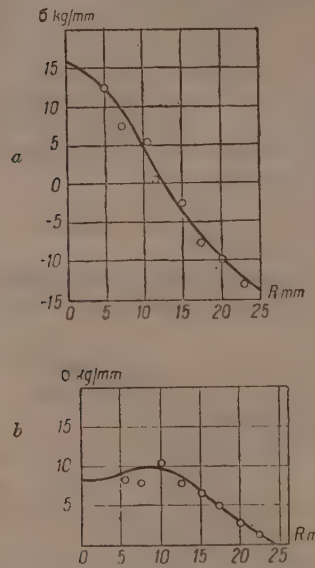


Abb. 2. Die Verteilung der a) tangentialen und b) radialen Spannungen in einer 5 mm dicken Scheibe (Durchmesser 50 mm).

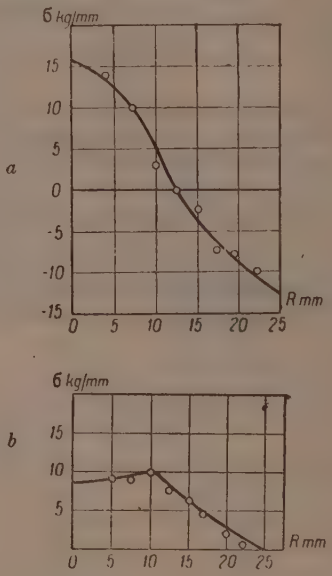


Abb. 3. Die Verteilung der a) tangentialen und b) radialen Spannungen in einem 50 mm langen Zylinder (Durchmesser 50 mm).

Nicht weniger wichtig ist die Bestimmung der Beeinflussung der Spannungsverteilung durch das Zerschneiden des Zylinders längs der Achse. In diesem Fall wird angenommen, das durch das Zerschneiden die tangentialen und auch die mit ihnen in Gleichgewicht stehenden radialen Spannungen aufgehoben werden. Wenn diese Annahme zutrifft, so darf die Gitterformänderung die röntgenographisch in der Randschicht des Schnittes gemessen wurde, vor der Dicke des abgeschnittenen Halbzylinderteils nicht abhängen.

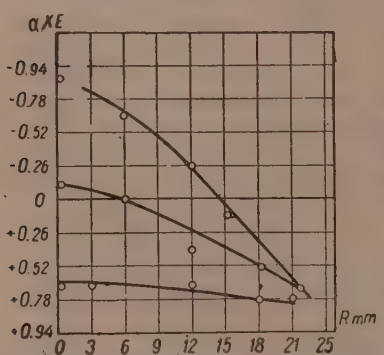


Abb. 4 Die Abhängigkeit der Kristallgitterformänderung in der Randschicht des Schnittes von der Dicke des «Halbzylinderstreifens».

Zur Prüfung der erwähnten Annahme wurde ein Zylinder mit Restspannungen (50 mm Durchmesser und 100 mm Länge) gewählt und längs der Achse in zwei gleiche Teile zerschnitten; dann wurde durch wiederholte parallele Schnitte, ein Halbzylinderstreifen von schrittweise abnehmender Dicke ausgeschnitten. Die Röntgenogramme wurden jedesmal an den gleichen acht Stellen in radialer Richtung der Halbzylinderebene aufgenommen. Die Abb. 4 zeigt die Abhängigkeit der Gitterformänderung von der Dicke des «Halbzylinderstreifens».

Nur bei einer Dicke des Halbzylinderstreifens von 10 mm und weniger ist die Gitterformänderung allein durch die Achsialspannungen verursacht.

Also werden beim Zerschneiden eines Zylinders längs der Achse in zwei Teile die tangentialen und radialen Spannungen nicht aufgehoben. Nur bei einer Dicke des Streifens von weniger als 10 mm kann angenommen werden, dass die tangentialen und radialen Spannungen praktisch völlig aufgehoben werden. Im dickeren Streifen bleiben die Achsialspannungen erhalten.

Physikalisch-Technisches Institut.
Dnjepropetrowsk.

Eingegangen
d. 11. VIII. 1936

ZITIERTE LITERATUR

[1] П. П. Давиденков, ЖТФ, 1, вып. 1, 5 (1931); П. Б. Михайлов-Михеев и П. А. Одинг, Материалы турбин и турбогенераторов, ОНТИ (1934); Ф. Ф. Витман и П. Давиденков, Спец. машиностроение, 7 (1932); G. Sachs-Metallwirtschaft, 8, 343 (1929); H. Bühler, H. Büchholz u. E. Scheil, Arch. f. d. Eisenhüttenwesen, 5, 413 (1931/32); H. Bühler u. H. Buchholz, Arch. f. d. Eisenhüttenwesen, 6, 247 (1932/33); H. Bühler u. E. Scheil, Arch. f. d. Eisenhüttenwesen, 7, 359 (1933/34). [2] М. П. Желдак, Г. В. Курдюмов и А. К. Протопопов, Заводская лаборатория, 7, 631 (1934). [3] F. Wever u. H. Möller, Arch. f. d. Eisenhüttenwesen, 5, 215 (1931). [4] М. П. Желдак и Г. В. Курдюмов, Заводская лаборатория, 6, 752 (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

GEOCHEMISTRY

SERICITIZATION OF PEGMATITES OF THE GDOV DISTRICT, LENINGRAD REGION, AND ITS GENESIS

By P. M. MURZAJEV

(Communicated by V. I. Vernadsky, Member of the Academy, 4. IX 1936)

In the year 1933, B. P. Asatkin (1, 2) discovered outcrops of biotite gneisses and granito-gneisses over alluvium at a small depth (1—1.5 m) near the town of Gdov (the village Mishina Gora) of the Leningrad region. This was a most important discovery, as to the South of Lake Ladoga (the southern boundary of the Fenno-Scandinavian screen) no continuation of the screen had been known. This discovery of Asatkin justifies us in expecting a continuation of this screen under the sedimentary formation of crystalline rocks to a considerable distance to the south. Almost at the same time, A. Opic and N. Thamm (2) found basic eruptive rocks under the strata of the Middle Devonian formation.

The locality near the village Mishina Gora is a plain with low hillocks composed of sedimentary rocks (limestone, quatrz sand, clay) of the Lower Cambrian, Lower Silurian and Middle and Upper Devoninan periods. They are superposed on Pre-Cambrian gneisses and are covered with alluvium and glacial formations. The Paleozoic formations with the underlying Pre-Cambrian rock are strongly deteriorated and are often split by tectonic fractures of two periods—the Pre-Devonian and the Post-Upper-Devonian (3). As a result, thick masses of frictional breccia, including fragments of Pre-Cambrian as well as Paleozoic rock, were formed. Biotite gneisses appear on the surface in the nucleus of an anticlinal fold, where they are found in most complicated tectonic interrelations with the surrounding paleozoic masses. Some sections of gneiss outcrops are big blocks surrounded on all sides by tectonic frictional breccia. As a rule, the contacts of the gneisses with the contiguous masses are vertical or nearly vertical surfaces of faults, but there have been observed contacts of breccia with gneisses at an angle of 15—25°. The gneisses are traversed by veins of pegmatites whose feldspar is very often cericitized.

In the present article, the author communicates the results of the investigation of the material collected by B. Asatkin, the initiator of this work. The author did not visit the mineral deposits himself, and was assisted in his work by the advice of B. P. Asatkin, P. A. Borisov, V. I. Vernadsky, Member of the Academy, D. S. Beliankin, and H. S. Nicogosjan, to whom he expresses his deep gratitude.

The biotite gneisses are composed of potassium feldspar (perthite and microperthite), plagioclase (№ 2—7), quartz, biotite and muscovite. Calcite is rarely met with. Potassium feldspar is highly pelitized and sericitized; the plagioclase is relatively pure. In the biotite the pleochroic areas have up to 70 μ in diameter. The quantities of the individual minerals decrease in the following order: quartz, perthite, biotite, muscovite, plagioclase. The structure is gneissic, sometimes only slightly pronounced (in granitogneiss). The rocks are fine-grained. V. M. Timofeev ([4]) gives a more detailed description of the gneisses.

From the chemical analysis given by Timofeev ([4]) it is seen that the alumina content is low (13—14%), that of alkali is also low, while the content of silica is high. The content of magnesium oxide exceeds that of calcium oxide and the content of potassium exceeds that of sodium. These data indicate that the gneisses in question belong to the paragneisses.

The pegmatites that traverse the gneisses are represented by veiny and lenticular bodies of a thickness varying from 1 cm to 3 m. They are embedded in a vertical as well as in a horizontal and sloping direction. They usually do not extend over more than a few metres. Their fragments of various sizes are also found in the frictional breccia. To judge from the scraps, they are composed of eugraphic pegmatite and pegmatoid; zones of feldspar are also possible. Their potassium feldspar is represented by a distinct microcline, which did not occur in the gneisses. It is more pelitized, turbid, often broken up in fragments and shows a wavy extinction. It is traversed by strips of broken fine-grained spar, sometimes with an admixture of a substance resembling kaolinite. Sericite often occurs in the microcline, varying from a pelitic substance up to considerable ledges (1—2 cm). Sometimes it fills fissures of 1—2 mm and more in the microcline, penetrating into the latter through thinner fissures; sometimes it entirely destroys the microcline, forming a snowwhite mixture of sericite, remains of spar and quartz. On rare occasions leaflets of chloride are observed in the pegmatite slides. The quartz in the pegmatite is also highly broken up, its structure sometimes resembling tesselation, and show a wavy extinction.

In the pegmatites of the Gdov district, connected with feldspar (microcline), the following varieties of mica are observed:

1. Coarsely foliated (0.5—4 cm in diameter) normal muscovite with a corresponding hardness, resilience and elasticity of the scales.

2. Coarsely foliated (0.1—4 cm) silvery mica of the type of gilbertite, showing less hardness. The scales are not resilient and have a mother-of-pearl shine.

3. A fine (1—0.001 mm) snow-white kaolin-like aggregate of sericite-like mica filling the fissures in the feldspar and sometimes replacing the latter. The physical properties of the sericite scales are similar to those of the silvery mica mentioned above. It seems that it is the same mineral in different forms.

Previous investigators ([3], [4]) took the last variety—the sericitic mica—for kaolin. It was ascertained by means of the immersion method that the Ng of the sericitic mica is 1.578+0.005. The double refraction is high, optically negative, 2 *V* at about 45°. On being heated, it does not swell, loses moisture gradually and is refractory. When heated with cobalt nitrate it does not take any colouring. It does not dissolve in H_2SO_4, nor in hot NaOH. The qualitative reaction shows the presence of potassium.

Thus, our mineral cannot be classed as kaolinite (according to double refraction), as hydrargillite (according to chemical reactions), as hydromica

(according to the nature of the separation of water), as paragonite (according to the presence of potassium). Consequently, our mineral possesses the properties of muscovite, but, according to the nature of its exudations, it must be classed as sericite or gilbertite. As will be seen below, the absence of elasticity is to be explained by its genesis being different from that of the muscovite. As regards its genesis, this sericitic mica corresponds to gilbertite. Thus, the process in question may, with equal justice, be called sericitization or gilbertization.

Unfortunately, the author has not had the possibility of making a chemical analysis and a rentgenometrical examination of the mineral and, therefore, could not exactly determine its nature.

The ascertaining of the genesis of the sericitic mica is more complicated: is its origin endohydatogenic (hydrothermal) or exohydatogenic (weathering)?*

It is known ([5], [6], [7]) that in the northern latitudes feldspars in weathering do not kaolinize, but cericitize. This process of decomposition probably takes place with the participation of the humus acids of the soil. On the other hand, the sericitization of feldspars is observed also at great depths and is explained as due to endohydatogenic processes. In this way, it is possible that both these processes take place in the Gdov district.

In the Gdov district, the sericitic mica occurs in fissures of the microcline. These fissures reach a considerable depth, branching out to the outside, and are not connected with the earth's surface. The microcline is firm, red, not discoloured. Examined under the microscope it shows strong pelitization and a broken up state. The sericitic mica is sometimes of a considerable size, up to 4 cm in diameter.

According to the investigations carried out by the author in North Karelia in 1936 in regard to exohydatogenic sericitization of feldspars, pegmatites, gneisses and granites, this process is manifested in the formation of a white crust on feldspar reaching a thickness of 2—3 cm. This crust is found on the very day-surface of the vein and rock, immediately under the sod. On the outer surface of the crust, the feldspar becomes loose and powdery, and it is here that sericitization is most intense. It reaches to a depth of 2—3 cm, to judge from the outcropping intact quartz. This process never penetrates to a depth greater than 10—20 cm. Sericite has not been observed in any considerable quantities. Sericite is always of microscopic size, dispersed in the mass of feldspar and does not necessarily occur in the fissures of pegmatite, unless fissures immediately adjoining the crust resulting from weathering (the sericitization of feldspar) are meant. As will be seen, these data do not coincide with those for Gdov.

On the other hand, during the same summer, the author observed a vertical vein of quartz-muscovite rock, about 1 m in thickness, traversing the biotite-granite gneisses in the western vein of the Zaparny Bay of Lake Louch (North Karelia), in the western wall of the diggings. The muscovite of which this vein was composed was silvery, non-elastic, soft and flexible. The quartz had many fissures and was easily fractured. The fissures of this muscovite and those of the vein contained fine pulverized kaolinite-like sericitic mica. This structure is maintained without any alteration throughout the entire depth of the digging (5 m).

On the opposite wall of the digging there was a second quartz-muscovite vein, but it was composed of normal ruby-coloured, resilient muscovite.

---

* The author uses the terminology proposed by A. K. Boldyrev, Курс описательной минералогии, ОНТИ, вып. III (1935).

These outcrops show that in the second vein we are dealing with a normal high-temperature muscovite I, which, in the first vein, was changed under the influence of hydrothermal solutions of lower temperatures into silvery gilbertite mica II; and, lastly, along the fissures of the vein—the paths along which moved the solutions, we have gilbertite due to still lower temperatures—the fine sericite III. Such processes of gilbertization of normal muscovite are widely spread in North Karelia, and have been observed in the above-mentioned diggings in all their stages. They are to be observed at any depth.

This clearly shows ([1]) that the exohydatogenic processes of sericitization take place at the earth's surface, while the endohydatogenic ones are not connected with the earth's surface. By comparing what has been set forth above with the data for Gdov, we arrive at the conclusion that the processes of sericitization of the Gdov pegmatites are of endohydatogenic origin.

Leningrad Geological
Prospecting Trust

Received
4 IX. 1936

REFERENCES

[1] B. P. A s a t k i n, C. R. Acad. Sci. URSS, No 5 (1933). [2] A. Ö p i k u. N. T h a m m, Publ. of the Geol. Inst. Unik tartu, № 33 (1933). [3] Б. П. А с а т к и н, Изв. Ленингр. геол. гидро-геодез. треста, вып. 1 (1934). [4] В. М. Т и м о ф е е в, Изв. Ленингр. геол. гидро-геодез. треста, вып. 1 (1934). [5] С. М. К у р б а т о в, Труды Госуд. исслед. керамич. ин-та, вып. II (1928). [6] П. П. Ш а ф р а н о в с к и й, Изв. Всес. геол. разв. объед., 50, вып. 5 (1932). [7] П. А. З а м я т ч е с к и й, Труды Почв. ин-та Академии Наук, VIII, вып. 1 (1933).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

GEOLOGIE

ÜBER DAS MIOZÄN SÜDOST-TRANSKAUKASIENS

Von A. G. EBERZIN

(Vorgelegt von A. A. Borissiak, Mitglied der Akademie, d. 16. VII. 1936)

Im Januar 1936 erhielt ich von dem Geologen K. N. Paffenholz liebenswürdigerweise einige Kalksteinexemplare aus dem Obertertiär, die von zwei Stellen Südost-Transkaukasiens herrührten—vom Berge Kabach-Tapa (Aserbeidshan, Rayon der Kolonie Annenfeld) und aus der Umgebung der Siedlung Nishnije Achty (Armenien) und bei den geologischen Untersuchungen in Jahre 1935 gesammelt worden waren.

Exemplare neogener Herkunft am Berge Kabach-Tapa wurden von Paffenholz auch früher—im Jahre 1925—gesammelt. Eine provisorische Bestimmung der letzteren durch W. P. Kolessnikow liess in denselben feststellen: *Serpula* sp., *Spirorbis* sp., *Modiola volhynica* Eichw. var. minor Andrus, *Modiola* (?) sp., *Cardium* sp., *Venerupis Abichi* Andrus., *Ervilia* (?) sp., *Mactra* sp., *Trochus* sp. und *Hydrobia* (?) sp. Die Kalksteine mit der oben aufgezählten Konchyliofauna wurden von Kolessnikow dem Alter nach dem Miozän zugeschrieben ([2], S. 309).

Die wenigen Exemplare—die schlecht erhaltenen Muschelkalkreste mit eingeschlossen—gestatteten nicht, deren Untersuchung gründlich und detailliert durchzuführen; es ist daher natürlich, dass einige Zweifel an der Bestimmung ihres Miozän-Alters auftauchten.

Die von Paffenholz vorgenommenen Schichtuntersuchungen der Fauna in den Kalksteinen des Kabach-Tapa-Gipfels erbrachten ein viel reicheres Material zur Lösung der Frage über das Alter der Kalksteine des Kabach Tapa, als es bisher gegeben hat.

Die Erforschung des neuen Faunamaterials dieser Kalksteine gestattet, sowohl deren Alter genauer anzugeben, als auch unsere Vorstellungen über die Verbreitung des Miozän in Südost-Transkaukasien wesentlich zu ergänzen. Dies hat mich dazu angeregt, hier einige Schlussfolgerungen und Bemerkungen darzulegen, zu denen ich bei der Faunabestimmung gekommen bin.

Indem ich hier einen Überblick über die neogene Fauna des Berges Kabach-Tapa gebe, halte ich es nicht für überflüssig, das Profil des Gipfels dieses Berges, der sich 1091.97 m über dem Spiegel des Schwarzen Meeres befindet,—anzuführen. Hier folgen auf der abradierten Oberfläche der Granodioriten von unten nach oben:

1. Olivgrauer, rostfarbiger, mergeliger Sandstein mit Einschlüssen von Granodioritklumpen. Mächtigkeit 0.3 m.

2. Gelblich-grauer, kleinmuscheliger, ziemlich dichter Muschelkalkstein. Mächtigkeit 1.5 m.*

3. Ein ebensolcher, aber hellerer kleinmuscheliger Kalkstein.

4. Stark überkristallisierter, stellenweise verdichteter und dolomitisierter, grossmuschliger, gräulicher Kalkstein, zuweilen braun-schwarzbraun, mit verwitterter Oberfläche.

Die allgemeine Mächtigkeit der Schichten 1—4 liegt innerhalb der Grenzen 20—25 cm.

In dem Exemplar aus der 1. Schicht, das einer Bestimmung unterzogen wurde, wurden keine organischen Reste entdeckt.

In dem Exemplar der 2. Schicht wurde *Ervilia trigonula* Sok. bestimmt, die massenweise gefunden wird und im betrachteteten Fall artbildend ist. Ausser ihr sind noch äusserst seltene, wegen ihrer Erhaltung nicht näher zu bestimmende kleine Gastropoden bemerkt worden.

In der Probe aus der 3. Schicht, wurden neben *Ervilia trigonula* Sok., das gleichfalls die Art überfüllt, seltenere und schlechter erhaltene *Pholas* cf. *pseudoustjurtensis* V. Bogatsch. entdeckt.

In einigen Proben aus der 4. Schicht wurde eine reiche und mannigfaltige Molluskenfauna, die nicht genügend gut erhalten war und folgende Arten enthielt, bestimmt: *Cardium* cf. *vindobonense* Lasc., *C.* cf. *lithopodolicum* Dub., *C.* sp. sp., *Tapes vitaliana* d'Orb., *Syndesmya* cf. *reflexa* Eichw., *Modiola innrassata* d'Orb., *Certhium* cf. *rubiginosum* Eich., *Certhium* sp. sp., *Hydrobia* sp. sp., *Trochus* cf. *angulatus* Eichw., *Tr.* cf. *subbalatro Koles*, *Tr.* cf. *turriculoides* Sinz., *Tr.* sp. sp, *Spirorbis*, *Serpula* sp., *Bryozoa*.

Am häufigsten findet man *Modiola incrassata* d'Orb., von ziemlich grossen Abmessungen, die sich hierin von der niedermäotischen var. minor unterscheiden.

Indem wir uns dem Alter der Schichten mit der oben aufgazählten Konchiliofauna zuwenden, kommen wir zu der Schlussfolgerung, dass die Schichten 2. und 3. dem konkischen Horizont angehören, und die höher liegende 4. Schicht sich schon auf das Niedersarmat** bezieht.

Mit Ausnahme von *Modiola volhynica* Eichw. var. minor Andrus und *Venerupis abichi* Andrus, widerspricht auch nicht die Aufstellung von Kolessnikow, der über wenig und noch schlechter erhaltenes Material verfügte, der Bestimmung des niedersarmatischen Alters.

Beide angegebenen Arten, die man im Niedermäotis findet, sind offenbar wegen ungenügenden Materials nicht richtig bestimmt worden. So könnten die Kerne und Abdrücke von *Tapes vitaliana* d'Orb. im Falle schlechter Erhaltung leicht für Reste von *Venerupis abichi* Andrus angesehen werden.

Schon P. F. Sinzow hielt die letztere Art für identisch mit *Tapes vitaliana* d'Orb. ([3], S. 60).

Ungeklärt bleibt nur das Alter der 1. Schicht des Profils des Berges Kabach-Tapa. Diese Schicht ist entweder die Basis des konkischen Horizonts, oder stellt vielleicht das Analogon des älteren, karaganischen Horizonts dar. Diese Frage lasse ich bis zu den weiteren Untersuchungen offen.

---

* Die Ablagerungsverhältnisse und die Mächtigkeit der Kalksteine des Berges Kabach-Tapa und der Umgebung von Nishnije Achty hat mir liebenswürdigerweise K. N. Paffenholz mitgeteilt, wofür ich ihm meinen tiefsten Dank ausspreche.

** Nachdem ich die Fauna bestimmt hatte, teilte mir Paffenholz mit, dass W. W. Bogatschew das Alter der Kalksteine des Berges Kabach-Tapa als sarmatisches ansieht und die Vermutung über das mögliche Vorhandensein auch des konkischen Horizonts dasselbst ausspricht. Ich halte es für meine Pflicht, dies zu vermerken und darauf hinzuweisen, dass meine Ergebnisse mit denen von Bogatschew zusammenfallen.

Die in der Umgebung von Nischnije Achty (Armenien) gesammelten Proben rühren von Stellen her, die auf der linken Seite des Flusses Sangi in 1.5 km Entfernung NNO von Nischnije Achty und zugleich westlich von der Landstrasse Eriwan-Elenowka gelegen sind. Die Kalksteine mit obertertiärer Fauna haben sich hier in einer absoluten Höhe von ungefähr 1700 m unmittelbar auf metamorphischem Schiefer des Niederpaläozoicums abgesetzt. Das Ausbeuteareal beträgt ungefähr 40—50 m², die Mächtigkeit bis zu 3 m.

Die Proben der niederachtinischen Kalksteine können ihrer lithologischen Zusammensetzung nach eingeteilt werden in: 1) gelblich-grauen Muschelkalkstein, von rostig-rötlicher Farbe mit kleinen (bis 2 cm Durchmesser) abgerollten abgerundeten, länglichen Geröllen von vorzugsweise vulkanischer Natur, die Sprünge weisen aparte Ausscheidungen feinkörnig-kristallinischen Kalzits auf; 2) hellgelber mergeliger Kalkstein, die Muscheln seltener als im 1); längs den Sprüngen sind dunkle Manganausscheidungen (?). Möglicherweise stellt der letztere Kalkstein eine dünne Zwischenschicht im ersteren dar.

Man kann nicht die festgestellten Unterschiede nach der Faunazusammensetzung trennen. Hier und da findet man vollkommen gleiche Molluskenarten, von denen die glatte Form der *Modiola volhynica* Eichw. var. minor Andrus die vorherrschendste ist. In dieser Hinsicht besitzen die Kalksteinen eine grosse faunische Ähnlichkeit mit dem Kertschensker «Sägestein» des Niedermäotis. Ein Vergleich der niederachtinischen *Modiola* mit den Kertschensker zeigt ihre Identität. Andere Pelezipoden ausser dieser Art wurden nicht entdeckt. Was die Gastropoden anbetrifft, die viel schlechter erhalten waren, so ist zu bemerken, dass man bei ihnen am häufigsten Kerne und Abdrücke von *Cerithium* cf. *disjunctoides* Sinz. und viel seltener die kleinen *Micromelania* sp. und *Hydrobia* sp. findet.

Schliesslich findet man unter den Gastropoden noch Muscheln von neritinaartiger Form. An einem Exemplar waren zum Teil Farbspuren in Form von Flecken und Streifen des Neritinatyps zu sehen. Von den bekannten Formen der letzteren unterscheiden sie sich kaum durch eine grosse Spirale. Die Unmöglichkeit, ihre Mündung zu präparieren, gestattet keine genaue Artbestimmung vorzunehmen.

Nach der Faunazusammensetzung der niederachtinischen Kalksteine kommen wir schliesslich zu folgender Aufstellung:

Modiola volhynica Eichw. var. minor Andrus (in grossen Mengen)
Certhium cf. *disjunctoides* Sinz. (nicht oft).
Micromelania sp.
Hydrobia sp. } (selten)
Neritina? sp.

Die ersten beiden Formen veranlassen mich den erwähnten Kalksteinen niedermäotisches Alter zuzuschreiben, und wenn auch die übrigen Muschelkalke zur Altersbestimmung nichts beitragen, so widersprechen sie, mit Ausnahme von *Neritina?* sp., dem nicht. Die Vertreter der Art *Neritina* sind im Mäotis bekannt, hauptsächlich von dem mittleren Teil dieser Schicht an.

Die Funde aus dem Niedermäotis auf dem linken Ufer des Sangas passen gut mit den Daten über das Vorhandensein des Obersarmats ([1], S. 466) in demselben Gebiet zusammen.

Ihrem Faunacharakter nach gehören die Berge Kabach-Tapa und Nishnije Achty zu der normalen «Meeres»-Fauna des Obermiozäns, nur im Niedermäotis ist aus dem Vorhandensein von *Neritina?* sp. ein Susswerden (mögli-

cherweise lokales, wegen des in der Nähe mündenden Flusses) merkbar. Aber der Zusammensetzung nach sind sie voneinander sehr verschieden. Während man im Primär neben *Modiola* viele Pelezipoden findet, gibt es im Sekundär überhaupt keine. Die niederachtinischen *Modiola* sind der Grösse nach beträchtlich kleiner (halb so gross) als die vom Kabach-Tapa. Nur ein Exemplar aus der gesamten Menge erreicht $^2/_3$ der Grösse der *Modiola* vom Kabach-Tapa. Die Gastropodenfauna besitzt auch keinerlei gemeinsame Formen.

Zum Schluss möchte ich noch bei einigen Folgerungen verweilen, die sich aus dem oben Dargelegten ergeben.

1. Der Faunacharakter des Berges Kabach-Tapa und von Nishnije-Achty weist darauf hin, dass die Formationen Niederschläge offener Meere sind (der konkischen, sarmatischen und mäotischen Zeit), die in freier Verbindung mit dem übrigen nördlichen Teil des östlichen Kaukasus standen.

2. Die Verbreitung der oben aufgezählten Ausläufer der konkischen, niedersarmatischen und niedermäotischen Ablagerungen nach dem Süden ändert wesentlich unsere Vorstellungen über die Geographie der neogenen Becken. Die Südgrenze des konkischen, sarmatischen und mäotischen Meeres reichte viel weiter nach Süden als bisher angenommen wurde.

3. Wenige erhaltene Reste aus dem Miozän, die bis zu 1700 m Höhe über dem Meeresspiegel hinaufgetragen wurden, zeugen davon, dass die Decke der Miozänablagerungen ein riesiges Verbreitungsgebiet hatte und einen beträchtlichen Teil der Fläche der östlichen Hälfte des Kleinen Kaukasus einnahm. Nach der Ablagerung der Miozänformationen folgten mächtige tektonische Bewegungen, die einzelne Teile ihrer Verbreitung auf verschiedene Höhe erhoben. Die Zeit der grössten tektonischen Bewegungen, die die östliche Hälfte des Kleinen Kaukasus in den Grundzügen formiert haben, die von den heutigen wenig verschieden sind, ist nicht vor das Nachmiozän zu datieren.

Geologisches Institut
Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Moskau

Eingegangen
d. 16. VII. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] В. П. Колесников Сарматские моллюски, Палеонтология СССР, т. X, ч. 2. Изд. Акад. Наук СССР (1935). [2] К. Н. Шаффенгольц, Изв. Геол. ком., т. XLVIII, № 3 (1929). [3] И. Ф. Синцов, Записки Новоросс. о-ва, т. XXI, вып. 2 (1897).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

GEOLOGIE

VERTEILUNG DER NADELN VON SCHWÄMMEN IN EINEM BOHRLOCH BEI TIEFBOHRUNGEN IN DER NÄHE DES DORFES POSSOLSK AM BAIKALSEE

Von G. G. MARTINSON

(Vorgelegt von A. D. Archangelskij, Mitglied der Akademie, d. 21. VI. 1936)

Im Jahre 1934 erhielt die Baikalische Limnologische Station der Akademie der Wissenschaften der UdSSR im südlichen und mittleren Gebiet des Baikalsees die mittels eines Röhrenlotes erhaltenen Ablagerungsproben vom Grund des Sees. Bei der biologischen Analyse der Bohrkerne, deren maximale Höhe 162 cm erreichte, wurde eine grosse Anzahl von Schwammnadeln ermittelt, die in allen Schichten anzutreffen waren.

In Anbetracht des guten Zustandes der Nadeln konnte der eventuelle Fund von Schwämmen in tiefer gelegenen, älteren Ablagerungen im Gebiet des Baikalsees von Interesse sein. G.J. Vereščagin beauftragte mich deshalb mit der biologischen Analyse von Proben aus Tiefbohrungen, die 1933—1934 von dem Trust Wostokneft am Baikalufer bei dem Dorf Possolsk bis zu einer Tiefe von 1457.75 m vorgenommen worden waren (Bohrloch № 1205).

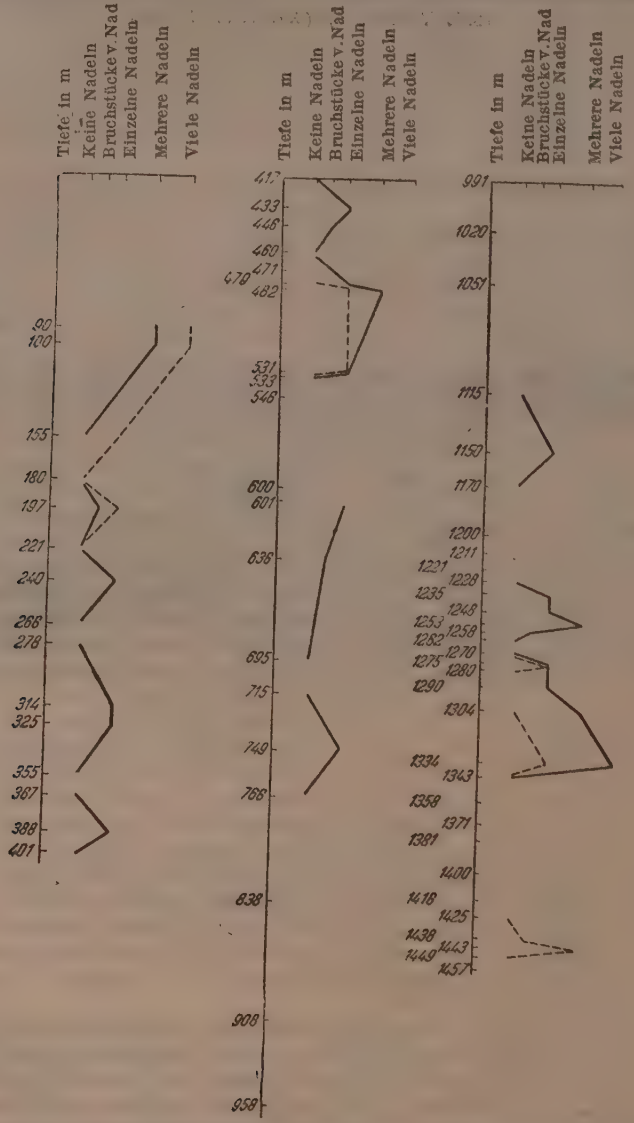
Proben aus diesem Bohrloch bis zu der Tiefe von 531 m hatte die wissenschaftliche Mitarbeiterin der Baikalischen Limnologischen Station N. W. Grek an Ort und Stelle entnommen. Proben aus grösseren Tiefen erhielten wir von dem Geologischen Institut der Akademie der Wissenschaften der UdSSR, welchem dieselben 1935 durch den Geologen M. A. Zyrkewič vom Arbeitsplatz zugestellt worden waren.

Obgleich die lithologischen Untersuchungen der Proben aus diesem Bohrloch noch nicht abgeschlossen sind, wie auch die Bearbeitung der Diatomeenreste noch fehlt, gestattet die Untersuchung der Schwämmereste dennoch einige interessante Schlüsse, die ihre Veröffentlichung rechtfertigen, ohne erst die abschliessende Bearbeitung der übrigen Befunde aus diesem Bohrloch abzuwarten.

Nadeln von Schwämmen sowie Reste von Diatomeen wurden in der ganzen Senkrechten des Bohrloches bis zu Schichten in 1443.8—1447.2 m Tiefe ermittelt.

Der obere Teil der Tiefbohrungsproben besteht abwechselnd aus Sand- und Tonschichten. Bei 290—830 m finden sich Lagen von Braunkohlen. Der untere Teil setzt sich vorwiegend aus Sandstein-und Tonschief erschichten

Verteilung der Nadeln von Schwämmen in einem Bohrloch bei Tiefbohrungen in der Nähe des Dorfes Possolsk am Baikalsee.



zusammen*. Irgendwelche Beziehung zwischen dem Bestand des Bodens und dem Fund von Nadeln von Schwämmen wurde nicht beobachtet; Nadeln wurden in verschiedenen Schichten, unabhängig von ihrem Charakter, gefunden.

* Nach der geologischen Beschreibung des Bohrloches No 1205, die gegeben wird für die Tiefe 0—886 m von dem Geologen Kusmin-Lewanowič, für 886—1036 m von dem Geologen A. J. Spechina; für 1036 m bis zu Ende nach dem Gutachten des Geologen Zyssouch und bestätigt von dem Geologen G. E. Rjabuchin.

Die Anwesenheit von Nadeln und Diatomeen in allen durchbohrten Schichten weist darauf hin, dass es sich hier um Süsswasserseeablagerungen handelt. Betreffs des Alters dieser Sedimente ist der Geologe G. E. Rjabuchin (1) der Meinung, dass das Bohrloch nicht nur durch die gesamte Lagermasse des Quartärs hindurch geht, sondern auch durch tertiäre Ablagerungen. Einen hinlänglichen Beweis für das tertiäre Alter der Ablagerungen in der Tiefe über 290 m sieht G. E. Rjabuchin (1) hauptsächlich in der Anwesenheit von Braunkohlenlagen in diesen Schichten. Er schreibt: «Die Schichten und Zwischenschichten von Braunkohle lassen es als unzweifelhaft erscheinen, dass diese Ablagerungen tertiären Sedimenten angehören, da in diesem Gebiet Braunkohle nur in tertiären Lagermassen angetroffen wird».

G. E. Rjabuchins Ansicht, dass die Schichten der Bohrung unterhalb 1220 m zu der oberen Kreide angehören, wird jedoch, soviel wir wissen, von einer Reihe von Geologen nicht geteilt.

Die Anwesenheit der Nadeln von zwei Familien von Schwämmen in den untersuchten Proben ist von Bedeutung für die Bestimmung des Charakters des Wasserbeckens, in dem die Bildung des Sedimentes vor sich ging.

Die Familie *Spongillidae*-Flusschwämme, die überall anzutreffen und für Süsswasser, charakteristisch ist, nur ausnahmsweise für Salzwasserbassins, wird bekanntlich in der Regel nicht tiefer als bei 30—40 m angetroffen. Im heutigen Baikalsee finden sich die *Spongillidae* an den durch Anspülung seicht gewordenen Stellen und einigen Buchten und nur äusserst selten an daran anschliessenden Partien des offenen Baikalsees.

Im Gegensatz hierzu wird eine andere Familie von Schwämmen, die *Lubomirskiidae*,—Baikalschwämme (bis auf eine Abart, nämlich die *Baicalospongia dzegatajensis*) nur im Baikalsee gefunden, da sie ihm endemisch ist. Nach P. D. Resvojs (2) Meinung seien die Baikalschwämme mariner Herkunft und stämmen scheinbar aus einer späteren Zeit als die übrigen Süsswasserschwämme, wodurch ihre nähere Verwandschaft mit den marinen Schwämmen zu erklären sei.

Der Fund von Nadeln der *Lubomirskiidae* weist darauf hin, dass zur Zeit der Ablagerung der Sedimente dieser Schicht ein Bassin mit einer dem Baikalsee von heute endemischen Fauna existierte, also sukzessiv mit dem heutigen Baikal verbunden ist. Und der Fund der Spongillidaenadeln spricht für den Einfluss von seichten Gewässern.

In Anbetracht des Gesagten sind die Nadeln der Schwämme für das Gebiet des Baikalsees leitend in der Beurteilung des Verhältnisses zwischen dem sibirischen und dem baikalischen Komplex im Laufe der gesamten Zeit der Bildung der untersuchten Ablagerungen.

Für die Feststellung des Mengenverhältnisses der ermittelten Nadeln (sieh Fig.) nahmen wir die Nadelmenge, die in 7—8 mikroskopischen Präparaten gefunden wurde.*

Bei der Untersuchung der Proben aus dem ganzen Bohrloch wurden. Nadeln folgender Abarten von Schwämmen gefunden:

Fam. **Spongillidae**—*Ephydatia fluviatilis* L., *Ephydatia muelleri* Lieberkühn, *Spongilla fragilis* Leidy, *Spongilla lacustris* L.

Fam. **Lubomirskiidae**—*Lubomirskia baicalensis* Pall., *Lubomirskia fusifera* Soukatsch, *Baicalospongia intermedia* Dyb. *Baicalospongia bacilliferа* Dyb.

In den oberen Schichten des Bohrloches, d. h. in 90 m Tiefe überwiegen, wie die Beobachtung zeigt, Nadeln der *Spongillidae* im Vergleich zu denen der baikalischen Schwämme. Hier werden alle oben genannten Abarten

* Gläser 15 × 15.

der *Spongillidae* angetroffen. Von den baikalischen Schwämmen wurden die *Lubomirskia baicalensis* und *Baicalospongia intermedia* gefunden. In der Schicht bei 100 m Tiefe erscheinen zudem noch die *Lubomirskia fusifera*. In 221 m Tiefe findet man eine Veränderung der Zusammensetzung der Spongiafaunareste. Die Nadeln von Flusschwämmen verschwinden. Es bleiben Nadeln baikalischer Schwämme *(Lubom. baicalensis, Baicalospongia intermedia)*, die in tieferen Schichten bis zu 749—753 m in quantitativer Beziehung starken Änderungen unterliegen (sieh Fig.), übrig.

Die Schicht zwischen 766.4—766.6 und 1150.5—1159.6 m ist durch vollkommenes Fehlen von Nadeln charakterisiert. In dieser Schicht wurden nur Diatomeen angetroffen. In den Schichten bei 1228.3 bis 1262.5 m wurden ausschliesslich Nadeln baikalischer endemischer Schwämme gefunden: *Lubom. baicalensis, Lubom. fusifera* und *Baicalospongia intermedia*.

In einer Tiefe von 1270.75 m befindet sich eine Schicht grauen Sandsteins sehr fester Konsistenz, die gar keine biologischen Reste enthält. Unterhalb dieser Schicht bei 1275.0 m wurde ausser Nadeln der *Lubomirskiidae (Lubom. baicalensis)* eine Nadel des Flusschwammes *Ephydatia fluviatilis* gefunden. Die Schicht bei 1334.9 m enthält eine grosse Anzahl von Nadeln der *Lubomirskiidae*: *Lubom. baicalensis, Baicalosp. intermedia, Baicalosp. baicalliiera*. Letztere Abart wurde nur in dieser Schicht entdeckt. Eine hier gefundene Spongillidaenadel gehört zur Art der *Ephydatia fluviatilis*.

Sodann befindet sich in 1343.15 m Tiefe zum zweiten Mal eine Schicht festen grauen Sansdteins, unterhalb der keine Nadeln der *Lubomirskiidae* mehr angetroffen werden. Bei 1443.8—1447.2 m wurde eine relativ grosse Anzahl von Spongillidaenadeln, nämlich *Ephidatia fluviatilis* ermittelt.

Somit stellen wir uns folgendes Bild vor, indem wir eventuelle Schlüsse ziehen in bezug auf die Veränderung des Charakters des Bassins im Gebiet des heutigen Dorfe Possolsk während der ganzen Periode der Ablagerung der untersuchten Sedimente:

Im Tertiär, möglicherweise im Paläogen, und wenn G. E. Rjabuchin recht hat, auch in der oberen Kreide existierte in diesem Gebiet ein seichtes Süssgewässer, das nur *Spongillidae* enthielt. Nach einiger Zeit wurde eine feste Schicht grauen grobkörnigen Sandsteins abgelagert, über der unmittelbar 9 m höher Nadeln der *Lubomirskiidae* erschienen. Folglich haben wir hier einen Beweis für eine rasche Änderung des Charakters des Bassins, als deren Ergebnis in diesem Gebiet Vertreter von Abarten erschienen, die dem Baikalsee von heute endemisch sind. Ausser Nadeln baikalischer Schwämme finden sich hier noch einzelne Nadeln von Flusschwämmen, die oberhalb der zweiten Schicht des festen Sandsteins (1270 m Tiefe) total verschwinden und, abgesehen von ihrem zeitweisen Erscheinen in der Schicht bei 482—531 m, erst bei 221 m sich wieder zu zeigen beginnen. Dies spricht für das Bestehen eines sukzessiven Zusammenhangs während dieser ganzen ungeheuren Zeitperiode mit den für den heutigen Baikalsee, mit seinen offenen Gebieten charakteristischen Bedingungen.

Das Auftreten in den oberen Schichten bis zu 221 m einer nach oben zunehmenden Menge Spongillidaenadeln hängt mit dem neu auftretenden, immer stärker werdenden Einfluss der seichten Gewässer und, den sich anschliessenden durch Anspülung seicht gewordenen Stellen zusammen, d. h. mit Bedingungen, die auch heute hier anzutreffen sind.

Inwieweit alle beschriebenen Veränderungen auf den ganzen Baikalsee zu beziehen sind, oder ob sie nur für den sich am Dorfe Possolsk anschliessenden Teil Geltung haben—darüber kann leider auf Grund von Untersuchungen eines Bohrloches nichts ausgesagt werden.

Die Analyse der Proben, die bei Bohrungen des Trusts Wostokneft in anderen Gebieten des Baikalsees erhalten worden sind, wird möglicherweise einiges Licht in dieses Problem bringen und uns dazu verhelfen, nicht nur die Geschichte des Quartärs, sondern auch des Tertiärs des Baikalsees zu rekonstruieren.

Baikalische Limnologische Station
Akademie der Wissenschaften der UdSSR

Eingegangen
d. 21. VI. 1936.

ZITIERTE LITERATUR

[1] Г. Е. Рябухин, Нефтяное хозяйство, 7 (1934). [2] П. Д. Резвой, Фауна СССР, т. II, вып. 2. Пресноводные губки (1936).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

MINERALOGIE

ÜBER GEWUNDENE QUARZE

Von G. LAEMMLEIN

(Vorgelegt von A. E. Fersman, Mitglied der Akademie, 19. X. 1936)

F. Bernauer(1) entwickelt in seiner Monographie über «Gedrillte Kristalle» die Ansicht, dass jeder Stoff bei passenden Kristallisationsbedingungen sowohl normal entwickelte Kristalle als auch sphärokristalline Bildungen ergeben kann, wobei zwischen diesen und jenen eine ununterbrochene Reihe von Übergangsformen existiert, welche er als «vollständige Kristallisationsreihe» bezeichnet. Gewisse sattelförmige Dolomitkristalle, kammförmige Azurit- und Prenitkristalle, garbenförmige Desminkristalle stellen charakteristische Bildungen eines zerspaltenen und deformierten Wachstums nach dem Typus der «vollständigen Kristallisationsreihe» dar. Das Äussere solcher Übergangsformen vom einfachen Kristall zum Sphärokristall muss, offenbar, vom Habitus und der Tracht des Kristalls und am Ende von der Symmetrie des Stoffes abhängen.

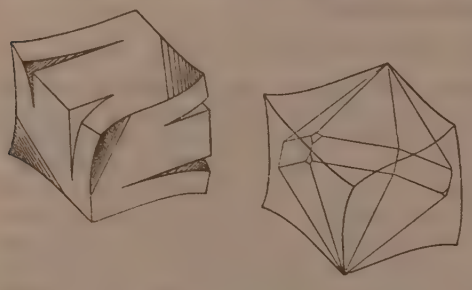
Indem er über gewundene Quarze spricht, hebt Bernauer hervor, dass man sie anscheinend auch zu solchen Übergangsformen der «vollständigen Kristallisationsreihe» des Quarzes rechnen kann, wobei die faserigen Abarten des Quarzes—Quarzin und Chalzedon—die sphärokristallinen Endformen darstellen. Doch nach kurzer Auslegung der komplizierten und verwickelten Geschichte des Studiums gewundener Quarze gibt Bernauer keine geometrischen Gesetzmässigkeiten über die Bildungen solcher «anomaler» Quarzkristalle.

Man kann natürlich die «gewundenen Quarze» nicht getrennt von anderen Fällen eines verzerrten Baues der Quarzkristalle betrachten, welche zuweilen nur in Form von «Schlieren» oder optischen Anomalien wahrgenommen werden. Denn in allen diesen Fällen wirken augenscheinlich die gleichen geometrischen Gesetzmässigkeiten.

Am Dolomit und den anderen aufgezählten Mineralien wird die Betrachtung der Geometrie ihres zerspalten-deformierten Wachstums durch die gleichförmige Entwicklung und die Einfachheit ihrer Kristalle erleichtert, beim Quarz dagegen, sind die deformierten «gewundenen Kristalle» als Regel nach dem Prisma $\{10\bar{1}0\}$ abgeplattet und anomal längs der a-Achse gestreckt, um welche der Kristall gleich einer Schraube gewunden ist, wobei für die linken Kristalle diese Schraube eine linke und für die rechten Kristalle eine rechte ist. In seltenen Fällen wurden gewundene normal entwickelte sechskantige Kristalle beobachtet, welche nach der gleichzeitig als Windungsachse dienenden c-Achse gestreckt waren. In diesem Fall sind umgekehrt die linken Kristalle nach rechts und die rechten nach links gewunden. Im wesentlichen ist das Alles, was über die Geometrie der ge

wundenen Quarze bekannt worden trotz der hundertjährigen Periode (angefangen mit Ch. S. Weiss, 1836) ihres Studiums und einer ziemlich umfassenden Literatur. Äusser den beiden oben erwähnten Typen der schraubenförmig gewundenen Quarze sind auch noch einfach gebogene Kristalle bekannt. Meist sind es nach der *c*-Achse gesrteckte, und öfters nach dem Prisma abgeplattete Kristalle.

In Gängen von alpinem Typus, welche von A. N. Aleschkow im nördlichen Ural (Berg Nerojka, Berg Sura-is) aufgefunden wurden, kommen zuweilen wundervoll ausgebildete gewundene Quarze vor, welche genau den bekannten Schweizer Kristallen von Tschermak's «offenem» Typus ähneln. Im Material, welches mir von A. N. Aleschkow zur Verfügung gestellt wurde, gibt es unter anderen Kristallen flache, nach der *c*-Achse gestreckte, zylindrisch gebogene Kristalle. Als Achse einer solchen Biegung dient die Kante $[\bar{1}2\bar{1}3]$ zwischen dem Trapezoeder und dem Prisma; wobei die Prismenfläche, an welche sich das Trapezoeder schliesst, eine Wölbung erhält. Die gebogene Prismenfläche ist mit Subindividuen parketiert, welche nach der Kante $[\bar{1}2\bar{1}3[$ gestreckt sind.



a b

Abb. 1.

Ein solcher gebogener flacher Kristall diente als Schlüssel zur Deutung der gewundenen und überhaupt der deformierten Quarzkristalle.

Wenn man annimmt, dass jede Richtung $[\bar{1}2\bar{1}3]$, deren es sechs in jedem Kristall des trigonalen Quarzes gibt, als Deformationsachse der Biegung dienen kann, so kommt man leicht zum folgenden Schema.

Stellen wir uns einen Kristall der trigonal-trapezoedrischen Klasse vor, welcher in Form von einem positiven Rhomboeder wächst (nach welchem beim Quarz die Spaltbarkeit ausgedrückt ist). Ein solcher Kristall zerspaltet nach der Spaltbarkeit, und die abgespalteten Plättchen (Subindividuen) biegen sich um die Achsen, welche den Zonenachsen der Trapezoeder parallel sind. Ein solcher linker Kristall ist auf Abb. 1,*a* schematisch dargestellt. Mit Hilfe einer solchen Abbildung kann man sich das System der möglichen Spaltebenen und der Biegungsachsen leicht vorstellen. Um dieses Schema mit der üblichen Entwicklung der Quarzkristalle zu verbinden, ist auf der Alb. 1,*b* ein deformiertes positives Rhomboeder abgebildet, in welches ein Quarzkristall hineingezeichnet ist. In der vorliegenden vorläufigen Notiz werde ich nur eine kurze Darlegung der Schlüsse geben, welche man ziehen kann, indem man sich eines solchen Schemas der Zerspaltung und Deformation des wachsenden Kristalls von einer Symmetrie des α-Quarzes bedient.

Wir wollen weiterhin annehmen, dass die Gitterdeformation des wachsenden Kristalls nicht nur nach irgendeiner beliebigen Biegungsachse, sondern auch nach zwei oder mehreren Biegungsachsen gleichzeitig vor sich gehen kann.

Ein normal entwickelter nach der *c*-Achse wachsender Quarzkristall wird nur die halbe Zahl von allen im Quarz möglichen Biegungsachsen haben, da sie im Gitter des reellen, in dieser Richtung gewachsenen Kristalls leichter zum Ausdruck kommen können. Auf diese Weise wird die Deformation des nach der *c*-Achse gestreckten sechskantigen Kristalls hauptsächlich

um die drei Biegungsachsen vor sich gehen, welche den drei sich auf dem oberen wachsenden Kristallkopfe entwickelnden Trapezoederkanten parallel sind. Um die Deutung des zerspalten-deformierten Kristallwachstums für eine ungeheuer feine Kristallfaser zu vereinfachen, kann man sagen, dass die Deformation des ganzen Gitters in gleichem Masse und gleichzeitig nach allen drei Biegungsachsen verläuft. Wenn man sie als primäre momentane Drehungsachsen betrachtet, so ergeben sie, indem sie sich nach der Regel des Parallelogramms summieren, eine resultative momentane Drehungsachse, welche im gegebenen Fall mit der *c*-Achse des Kristalls

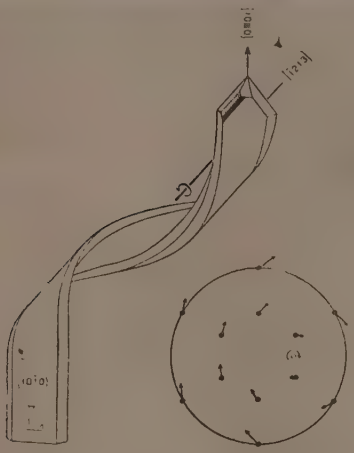


Abb. 2.

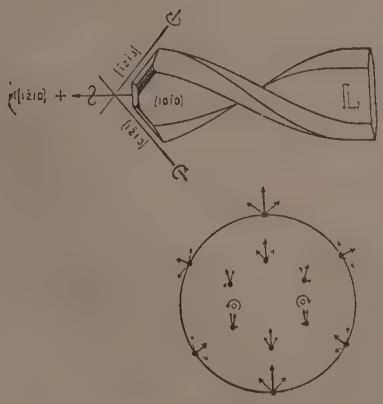


Abb. 3.

zusammenfällt, und die erhaltene resultative momentane Drehungsachse ergibt zusammen mit der mit ihr zusammenfallenden Fortbewegung des Kristallwachstums die Achse der Schraubendeformation.

Aus dem vorgeschlagenen System der primären Biegungsachsen folgt, dass die linken Kristalle im Fall des Wachstums sich längs der *c*-Achse nach rechts, und die rechten—nach links winden werden, wie das auch in der Natur der Fall ist.

Für einen nach dem Prisma abgeplatteten und längs der *c*-Achse wachsenden Kristall kann man nur eine momentane Biegungsachse in Betracht ziehen, welche in der Ebene des entwickelten Prismas liegt, und bei geringer Dicke der Kristallplatte kann man die beiden anderen ausser Acht lassen. Dann wird der flache Kristall, indem er wächst, sich in Form von einer zylindrischen Spirale biegen, als deren Achse die Richtung dienen wird, welche der Kante des einzigen auf dem Kristall entwickelten Trapezoeders parallel ist. In übertriebener Form ist ein solcher Fall auf Abb. 2 dargestellt. Die Zeiger auf der stereographischen Projektion zeigen die Verschiebungsrichtungen der Projektionen der Flächen des sich biegenden Kristalls.

Doch wenn der nach dem Prisma abgeplattete Kristall in der Richtung der *a*-Achse wächst, so werden auf Grund der Wachstumsbedingungen in den Ebenen der entwickelten Prismen schon zwei primäre momentane Biegungsachsen liegen, welche, indem sie sich summieren, eine mit der Wachstumsrichtung nach der *a*-Achse zusammenfallende resultative momentane Achse ergeben werden, und eine solche Verbindung wird eine schraubenförmige Deformation der wachsenden Kristallplatte hervorrufen. Hierbei stimmen

die für die linken und rechten Kristalle gefundenen Windungsrichtungen, wenn man aus dem Schema der primären Windungsachsen ausgeht, wiederum mit den in der Natur beobachteten überein.

Auf Abb. 3 ist eine solche sich windende, kristallinische, flache, in der Richtung der *a*-Achse wachsende Faser dargestellt. Vor dem wachsenden «Kristallkopf» sind die primären und resultativen Deformationsachsen abgebildet. Auf der stereographischen Projektion zeigen die dünnen Zeiger die Verschiebungsrichtungen der Projektionen der Flächen nur für die primären Biegungsachsen, die dicken Zeiger hingegen für die resultative Achse.

Übrigens ist auf der Zeichnung ein in der positiven Richtung der *a*-Achse wachsender Quarzkristall abgebildet. Das Wachstum gerade in der Richtung des positiven Endes der *a*-Achse ist für die gewundenen Quarze aus der Schweiz und aus anderen Orten charakteristisch; so dass dieses, offenbar, ein wesentliches und nicht zufälliges Merkmal ist. Tatsächlich werden beim Wachstum in der negativen Richtung der *a*-Achse die primären momentanen Biegungsachsen nicht in der Ebene der entwickelten Prismen liegen.

Merkmale einer Wachstumsdeformation werden nicht nur an gewundenen Kristallen wahrgenommen. Man kann sie an allen Kristallen aus denselben Gangvorkommen von alpinem Typus erblicken, doch sind sie nicht in so deutlicher Form ausgedrückt. In den zur optischen Achse senkrechten Schnitten lässt sich dies in Form von «Schlieren» und optischen Anomalien wahrnehmen, deren Entstehung durch die Zerspaltung des Kristalls in Subindividuen und durch die Abweichung der letzteren bedingt ist.

Man muss anmerken, dass die optischen Anomalien als Regel nur in den drei Anwachspyramiden des Kristalls beobachtet werden, welche durch das Wachstum des positiven Rhomboeders gebildet sind. In dem Fall jedoch, wenn der Kristall ein Dauphinée'scher Zwilling ist, gibt es in allen sechs Sektanten Anomalien.

R. Weil[2] schlug sogar vor, die Kristalle nach diesem Merkmal in zwei Typen einzuteilen. Übrigens kann man hier darauf hinweisen, dass die allerfeinsten, haarförmigen, von Weil beschriebenen Einschlüsse gerade zwischen den Subindividuen angeordnet sind, welche im allgemeinen sehr eng aneinander liegen. Bei Ätzung mit Flussäure geht die Zerstörung in erster Linie an diesen versteckten Trennungsflächen der Subindividuen vor sich. Da aber die Subindividuen sich leichter in der Anwachspyramide des positiven Rhomboeders bilden, so werden in dem zur *c*-Achse senkrechten Schnitte auch die drei durch die Säure mehr zerstörten Sektanten erhalten werden (beim Dauphinée'schen Zwilling werden alle sechs zerstört).

Auf diese Weise können mit Hilfe der primären Deformationsachsen des wachsenden Quarzkristalls geometrisch alle beobachteten Fälle von Wachstumsanomalien des Quarzes erklärt werden. Hierbei treten diese oder jene Formen seines deformierten Wachstums in strenger Abhängigkeit von der verschiedenen Entwicklung des Kristalls von seinem Habitus auf.

Eine ausführliche Darlegung des in dieser Notiz Mitgeteilten und eine Beschreibung der studierten Kristalle wird in nächster Zeit in einem speziellen Aufsatze erscheinen.

Lomonossowsches Institut
für Geochemie, Kristallographie und Mineralogie
Akademie der Wissenschaften der UdSSR
Moskau

Eingegangen
d. 19. X. 1936

ZITIERTE LITERATUR

[1] F. Bernauer, Forsch. zur Kristallkunde, H. 2 (1929). [2] R. Weil, C. R., **191**, 270—272, 380—382, 935—937 (1930).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

MICROBIOLOGIE

SUR L'ANTHOCYANINE CHEZ LES ACTINOMYCÈTES

Par A. E. KRISS

(Présenté par G. Nadson de l'Académie, le 9. VI. 1936)

Les anthocyanines et les anthocyanes appartiennent au nombre de colorants très répendus dans la nature. Ce sont des pigments d'origine végétale. La présence des anthocyanines est établie chez la majorité des formes végétales supérieures.

La nature chimique de ces matières est maintenant assez élucidée, surtout grâce aux travaux de Willstätter et de son école. Ils présentent des mono- ou des diglucosides de 6 types fondamentaux des anthocyanidines: pélargonidine, cyanidine, delphinidine, péonidine, syringidine et hirsutidine.

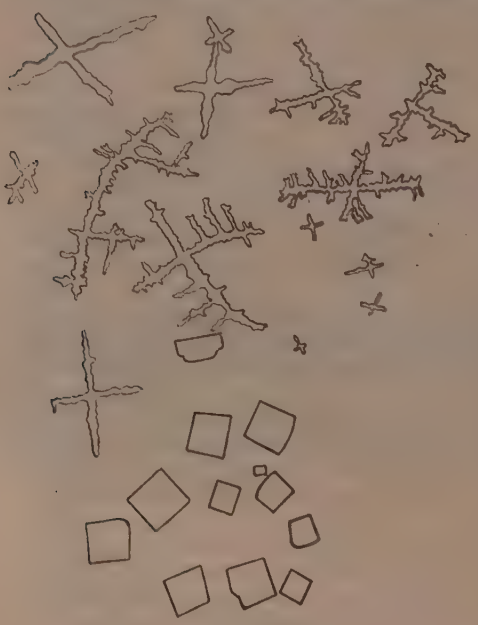
Du nombre de produits obtenus par hydrolyse on n'a étudié que le résidu monosachharidien. Il est présenté par la glucose, la rhamnose et la galactose. La composition du résidu disaccharidien, reste jusqu'à présent ignorée.

Les propriétés physiologiques et le rôle biologique de l'anthocyanine sont peu étudiés, de même que sa distribution en dehors du domaine des végétaux supérieurs. Nous n'avons pas trouvé de données littéraires sur la présence de ce pigment chez les champignons et les bactéries. Chez les actinomycètes on y rencontre des pigments bleus ou violets qui virent facilement selon la réaction du milieu. Ils passent au rouge ou au orange dans les milieux acides, virant au bleu ou au vert dans les milieux alcalins. En conséquence de ses études sur le pigment bleu de *Steptothrix coelicolor*, Müller (1908) a établi que ce pigment est facilement soluble dans l'eau et dans les solvants aqueux, restant parfaitement insoluble dans les solvants organiques. L'auteur a désigné le pigment obtenu par lui sous le nom d'amylocyanine et il croit d'être proche aux anthocyanines. Beijerinck en 1933 a trouvé le pigment bleu chez *Actinococcus cyaneus* qu'il identifie avec la souche de Miller. Pourtant l'auteur nie la parenté du pigment bleu aux anthocyanines.

Parmi les actinomycètes isolés des sols bruns du stationnaire Eršov (province de Saratov) on a trouvé deux souches, *Act. violaceus ruber* (Waksman) I et II, qui différaient l'une de l'autre par une quantité de caractères morphologiques et de propriétés physiologiques. Les deux formes ont donné un fort beau pigment bleu sur une série de milieux. Les conditions étant

favorables (30—33° C., bonne aération, petite humidité), la formation du pigment s'engageait bien vite: au deuxième ou au troisième jour. Au 7—8e jour les cultures et le milieu entier étaient d'un bleu foncé.

Pour étudier l'influence du substratum sur la formation du pigment bleu, nous avons utilisé le milieu minéral de Czapek (KCl—0.5g; $MgSO_4$—0.5 g; K_2HPO_4—1.0g; $FeSO_4$—0.01g; $NaNO_3$—2.0 g; saccharose—30.0 g; craie—3.0 g; eau distillée—1000.0; gélose—20.0), dans laquelle variait la quantité de nitrate de sodium. Des sources différentes d'azote et de carbon ont été introduites; le sel de cuisine a été appliqué aux quantités variables.



Cristaux de anthocyanidine.

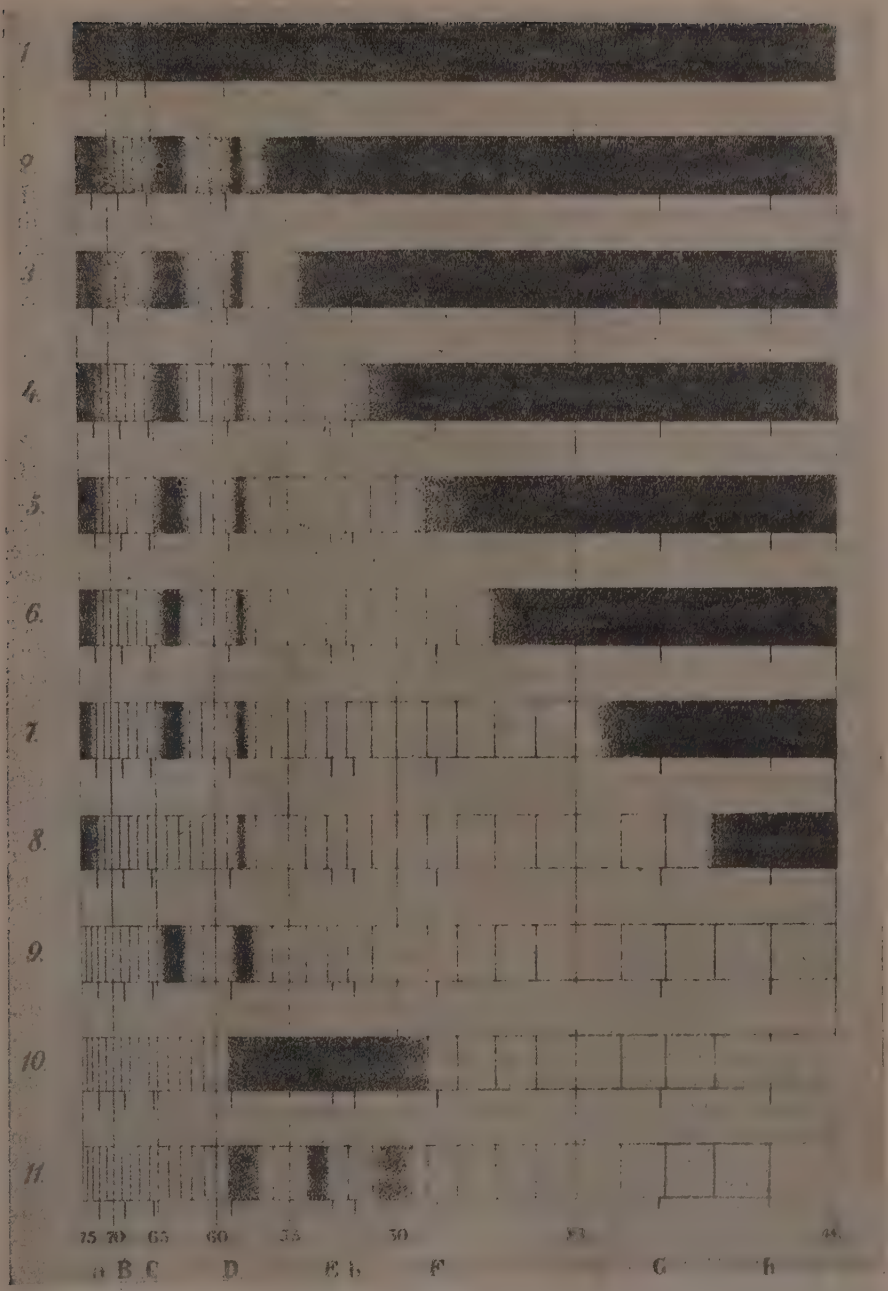
Outre ces milieux nous avons appliqué d'autres: gélose peptonée, gélose au moût de bière, gélatine, pommes de terre, carottes.

L'influence du pH du milieu était étudiée sur la gélose au moût de bière ou par l'alcalisation avec de la soude.

Act. violaceus ruber I donne la plus intense coloration sur les milieux de Czapeck; à $NaNO_3$ — 0.2%; à K_2HPO_4 — 0.007% et 0.07%, avec de la lactose. A l'introduction dans le milieu de Czapeck du sulfate d'ammonium et de l'asparagine comme sources d'azote, la culture passait à l'orange; elle virait au violet sur le milieu ordinaire de Czapeck, à NaCl—0.05% et 0.1%, et au rouge pâle aux pH 5.5; 6.6; 7.0. La formation du pigment n'a pas lieu sur les milieux de Czapeck contenant de la glucose et de la paraffine, tandis que sur la gélose peptonée et sur les carottes le mycelium au-dessus des colonies vire du blanc au bleu selon le milieu.

Act. violaceus ruber II passe au violet sur le milieu de Czapeck au sulfate d'ammonium et à l'asparagine comme source d'azote, virant au rouge sur la gélose à pH 5.6; 6.6; 7.0 et sur les pommes de terre. Les cultures restent incolores sur le milieu de Czapeck à $NaNO_3$—2% et sur les carottes.

Le pigment de toutes ces souches se laisse extraire facilement par l'eau froide et chaude et par l'alcool dilué. L'alcool absolu, l'éther sulphurique, l'éther pétrolé ne dissolvent pas le pigment. Tous les acides: l'acide formique, oxalique lactique, acétique, chlorhydrique, citrique et sulfurique donnent une coloration rouge en présence du pigment. A l'addition à la solution aqueuse de pigment de 25% d'alcali le rouge vire au verdâtre. Les extraits hydriques des cultures à coloration rouge-violette, rose et rouge possèdent la même couleur qui s'intensifie par l'addition d'acides et vire au bleu-verdâtre à l'addition d'alcali. L'acétate de plomb additioné à la solution aqueuse de pigment à raison 1 p. 100 provoque la precipitation d'un résidu violet. Le spectre d'absorption dans les solutions aqueuses du pigment, ou



1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8—Spectres des solutions aqueuses du pigment de Act. violaceus ruber I et II, rangés selon la concentration décroissante des solutions.
9—Spectre de la solution alcaline du pigment. 10—Spectre de la solution acide du pigment. 11—Spectre de la solution acide du pigment déposé durant queques jours.

bien alcooliques à 25 p. 100, est caractérisé par deux raies distinctes dans la partie rouge du spectre

I. . . . . $\lambda = 645 - 625$ µµ
II. . . . . $\lambda = 590 - 570$ µµ

La raie I surpasse la raie II par son intensité. L'addition d'alcali, NaOH à 25 p. 100, augmente l'intensité de ces raies. Dans des solutions acides du pigment fraichement préparées, le spectre possède une raie d'absorption ininterrompue λ 590—490 µµ. Dans les extraits déposés pendant quelque temps le spectre d'absorption devient inintelligible. Les solutions acides de tels pigments modifiés possèdent 3 raies d'absorption

I. . . . . $\lambda = 590 - 570$ µµ
II. . . . . $\lambda = 540 - 530$ µµ
III. . . . . $\lambda = 505 - 495$ µµ

D'après leur intensité elles sont à ranger à la manière suivante: I>II>III. Les extraits obtenus des cultures à couleur rouge ou violette possèdent les mêmes spectres, mais les bords des raies sont moins distincts. Le rapport entre le pigment bleu et les dissolvants, sa propriété de virer en présence des acides et des alcalis à la façon d'un indicateur, de même que sa réaction avec l'acétate de plomb m'ont contraint à supposer que nous avons à faire avec le pigment du groupe d'anthocyanes. Pour résoudre définitivement la question nous avons entrepris l'étude comparative des propriétés des anthocyanes typiques empruntées aux fleurs *Begonia*, *Pellargonium*, *Primula*. Il était extrêmement facile d'établir l'identité des pigments de ces fleurs et de notre pigment bleu à l'égard de différents dissolvants, des acides et des alcalis. L'étude spectroscopique de ces extraits aqueux démontre l'absence de différence essentielle entre eux. La solution aqueuse de *Primula* additionnée de soude caustique à 25% donne deux raies d'absorption dans la partie rouge du spectre, dont l'absorption correspond à la position des raies de notre pigment. Une différence legère a été observée dans la position des raies présentées par la solution alcaline du pigment des fleurs *Begonia*. Ici la I raie: λ 660—645 µµ, la deuxième est à peine visible entre λ 595—580 µµ.

Il n'y était pas possible d'obtenir le spectre d'absorption dans la solution alcaline de *Pellargonium*. Les solutions acides de *Pellargonium* et de *Begonia* ont une raie large 550—480, tandis que *Primula* possède λ 560—490 µµ. Nous avons contrôlé l'hydrolyse de notre pigment et du pigment de *Primula*. Les quantités de colorant n'étant pas grandes on faisait la réaction sur les lames de verre microscopiques. On posait une goutte de solution concentrée du pigment sur le verre propre pour l'évaporer jusqu'à la consistence épaisse à la température de 50°. Puis on additionnait de l'acide hydrochlorique et on faisait bouillir le mélange pendant quelque temps au-dessus de la flamme. La cristallisation pouvait déjà être vue à l'œil nu pendant l'ébullition. Au microscope il y avait à voir un grand nombre de tablettes rectangulaires et d'aiguilles pareilles d'après leurs formes à celles d'actinocyanidines typiques (Fig. 1). Ainsi nous pouvons dire en toute sûreté des choses, que le pigment bleu isolé par nous chez les actinomycètes présente un grand intérêt théorique montrant que la formation du pigment chez ces formes végétatives inférieures a pour base les mêmes réactions synthétiques de métabolisme que celles qui ont lieu chez les végétaux supérieurs.

En conclusion, je remercie ici bien cordialement l'académicien V. N. Lubimenko pour la direction des travaux, ainsi que l'académicien G. A. Nadson pour ses indications bien précieuses.

Institut de Microbiologie et Laboratoire de Botanique Expérimentale de l'Académie des Sciences de l'URSS. Moscou.

Manuscrit reçu le 9. VI. 1936.

LITTÉRATURE CITÉE

[1] M. Beijernick, Folia Microbiologica, II, 185 (1913). [2] N. Berestnew, Zentrbl. f. Bakt., I Orig., **26**, 390 (1899). [3] А. Данилов, Изв. Гл. ботанич. сада, **21**, вып. 2 (1922). [4] G. Klein, Handbuch der Pflanzenanalyze, III, 941 (1932). [5] Klincksieck et Valette, Code de couleurs, Paris (1908). [6] R. Lieske, Morphologie und Biologie der Strahlenpilze, Leipzig (1921). [7] Lippman, Ber. d. Deutsch. Bot. Ges., **46**, 267 (1928). [8] В. Любименко и Бриллиант, Окраска растений. Растительные пигменты, Ленинград (1924). [9] R. Müller, Zentrbl. f. Bakt., I Orig., **46**, 195 (1908). [10] Г. Надсон, О пигментах грибов, Изд. Петерб. Об-ва естествоиспытателей (1891). [11] Ouslow, The Anthocyane (1927). [12] Robinson, Nature, **135**, 3418, 732 (1935). [13] Schov, Helvetica Chem. Acta, X, 907 (1927). [14] S. Waksman, Soil Sci., 8, 71 (1919).

Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS
1936. Volume IV (XIII), № 6 (110)

ZOOLOGIE

DIE SCHWANZKIELE DER FISCHE

Von V. VASNECOV

(Vorgelegt von A. A. Borissiak, Mitglied der Akademie, d. 5. VII. 1936)

Es gibt heute zwei Haupttheorien der Bildung von paarigen Extremitäten bei den Wirbeltieren. Die eine benennt man nach ihrem Begründer Gegenbaur. Sie behauptet, dass die paarigen Extremitäten eine Modifizierung der hinteren Zwischenkiemenscheidewände sind. Nach der Reduktion der Kiemenspalten selbst traten diese Scheidewände zurück und ergaben die vorderen und die hinteren paarigen Extremitäten.

Die andere Theorie—die Theorie der Seitenfalte—besagt, dass die paarigen Extremitäten selbständig aus Längsfalten an den Seiten des Körpers entstanden sind. Die Muskulatur wuchs aus der segmentalen Muskulatur des Körpers in diese Falten hinein, und das Skelett entstand in Form einzelner parallel liegender Strahlen. Später wuchsen die Basen dieser Strahlen zusammen. Zugleich verbreiteten sich die Strahlen innerhalb der Körperwände, und in dieser Weise entwickelten sich alle Teile des Skeletts der Extremitäten, einschliesslich des Becken- und Schultergürtels.

Alle Tatsachen, welche wir bis jetzt kennen, sprechen zu Gunsten dieser letzteren Theorie. Wir nehmen sie daher an und betrachten sie als Ausgangstheorie zur Beurteilung der Evolution der paarigen Extremitäten. Die Forschungen des Akademikers A. N. Sewertzoff über die Entwicklung der Bauchflossen des Sterlets sind besonders beweiskräftig. Sie zeigen, dass in den früheren Entwicklungstadien das Bauchflossenskelett aus einer Reihe von einzelnen Strahlen besteht. Stützen wir uns aber auf die Theorie der Seitenfalte, so bleiben uns die ersten Anfangsstadien der Phylogenese der paarigen Extremitäten unklar. Es wird angenommen, dass paarige Flossen durch Spaltung aus unpaarigen Flossen entstanden sind, welche früher längs der dorsalen und ventralen Mittellinie des Körpers wuchsen. Einer anderen Hypothese zufolge fanden sich paarige Falten über die ganze Länge des Körpers und durch Verschmelzung sind aus ihnen die unpaarigen Flossen entstanden. Diese Hypothese wird übrigens heute nicht mehr angenommen. Die meisten Forscher sind der Meinung, dass es anfänglich nur eine Längsfalte an jeder Körperseite gab, und dass diese später in eine vordere und eine hintere zerfiel.

Diese Ansichten beruhen aber auf keinerlei beweiskräftigen morphologischen oder paläontologischen Argumenten. Aus diesen Gründen nehmen neuerdings viele Forscher, wie Sewertzoff und Goodrich die Möglichkeit einer selbständigen Entwicklung der vorderen und hinteren Extremitäten

an. Ebenso besitzen wir keinerlei Anhaltspunkte zur Beurteilung der Reihenfolge und der Form, in welcher sich die einzelnen Teile der paarigen Extremitäten—das Skelett und die Muskeln entwickelten. Endlich bleibt uns die Funktion der paarigen Extremitäten bei ihrer Entstehung gänzlich unklar. Die Brust- und Bauchflossen der im allgemeinen primitivsten modernen Fische, der Haie, sind wenig bewegliche Tiefensteuer. Zugleich vergrössern sie die gesamte horizontale Körperfläche und wirken bei der Bewegung etwa wie die Flächen eines Flugzeugs; sie halten den Körper stabil und aufrecht im Wasser. Doch haben die paarigen Flossen der Haie schon ein kompliziertes Skelett und Muskelsystem, also können sie nicht als die primitive Form dieser Organe angesehen werden. Weder bei den rezenten noch bei den fossilen Fischen finden wir solche Verhältnisse, die uns eine Vorstellung von den frühesten Entwicklungsstufen paariger Extremitäten geben könnten. Deswegen glauben wir, eine Analogie mit solchen Organen suchen zu müssen, welche ihrer Bildung und teilweise auch ihren Funktionen nach unserer Vorstellung von den früheren Stadien der Phylogenese paariger Extremitäten im Sinne der Seitenfaltentheorie nahekommen. Bei den Fischen finden wir auch wirklich solche Organe, die sogenannten Schwanzkiele, Falten an den beiden Seiten des Schwanzes neben der Wurzel der Schwanzflosse. Solche Kiele finden wir bei verschiedenen fossilen und rezenten Fischen, bei den Knorpel- wie auch bei den Knochenfischen. Unter den fossilen Fischen besitzen die *Cladoselachia*, welche als die primitivsten Knorpelfische gelten, solche Kiele. Unter den rezenten *Elasmobranchia* finden wir Kiele bei den Mitgliedern der Familie *Lamnidae* und bei den ihnen nahe stehenden *Cetorhinidae*, *Rhinodontidae*, auch bei den Rochen *Torpedo* und *Rhinobatis* und bei den mit den Rochen verwandten *Rhina squatina*. Unter den Knochenfischen besitzen Kiele die *Scombridae* (Makrelen), die Schwertfische *(Xiphiidae)*, die Familie *Corangidae* und die Stachelfische *(Gasterosteidae)*. Die Kiele haben bei allen diesen Formen einen verschiedenen Bau. Die *Cladoselachia* haben ziemlich stark entwickelte Kiele und nach B. Dean besassen sie ein inneres Skelett aus einer Reihe paralleler Strahlen, so dass einige Paläontologen (Claypol, 1895) sie sogar das dritte Extremitätenpaar nennen.

Die Kiele der *Lamna* haben die Gestalt von verhältnismässig unbedeutenden Hautfalten, welche um die Wurzel der Schwanzflosse auf der Seitenfläche liegen. Im Inneren findet sich festes Bindegewebe, welches augenscheinlich aus dem Corium der Haut gebildet ist.

Wir hatten die Möglichkeit, den Bau der Schwanzkiele beim *Torpedo* etwas ausführlicher zu studieren. Dieser besitzt, wie alle Rochenformen, einen länglichen und verhältnissmässig niedrigen Kiel.

Die Falte hat eine obere Decke aus gewöhnlichen Hautepithelium, darunter befindet sich eine verhältnismässig dünne Schicht von lockerem Bindegewebe. Unter ihr liegt eine Schicht von festerem Bindegewebe, welche gewissermassen das Skelett der Falte bildet. Ihr Inneres ist wiederum mit lockerem Gewebe angefüllt. Die äussere lockere Schicht ist aus der äusseren Coriumschicht gebildet und die feste Schicht wie das innere lockere Gewebe sind aus der inneren festen Coriumschicht entstanden. Ein derartiger Bau der Schwanzkiele des *Torpedo* zeigt grosse Ähnlichkeit mit dem Bau der Fettflossen der Knochenfische in solchen Fällen, wo sie schwach entwickelt sind und keine «Hornfäden»—Actinotrichia—haben.

Unter den Knochenfischen haben die Makrelen meistens drei Schwanzkiele an jeder Seite. Der mittlere ist in Form einer niedrigen Falte etwas stärker entwickelt und oberhalb wie unterhalb von ihm befinden sich ganz

kleine, noch niedrigere Fältchen. In manchen Fällen, z. B. bei der Makrele selbst fehlt der grosse mittlere Kiel. Dort, wo er sich entwickelt, besteht er nur aus der äusseren Schicht des Coriums. In diesem Falle ist die Schicht verhältnismässig dicht und enthält stellenweise einige Schüppchen. Die anderen Kiele sind ungefähr ebenso gebaut.

Die Familie *Corangidae* hat ebenfalls Kiele, die aus Falten der äusseren Schicht des Corium gebildet werden. Aber sie sind in ihrer ganzen Breite mit grossen dornähnlichen Schuppen bedeckt. Hier kann man schon von Kielen sprechen, welche durch vergrösserte Schuppen gebildet sind.

Einen ähnlichen Bau der Kiele finden wir auch bei dem Stachelfisch, aber hier bedecken die ziemlich stark entwickelten Schuppen nicht die ganze Falte. In ihrer Form erinnert sie an jenes flossenartige Gebilde, welches sich aus einem etwas späteren Stadium bei den Jungfischen der Störe aus dem Vorderteile der unpaarigen Flossenfalte vor der Rückenflosse entwickelt, oder auch an die Fettflosse einiger Panzerwelse.

Was die Entwicklung der Schwanzkiele betrifft, so erscheinen sie beim *Torpedo* auf einer ziemlich späten Stufe, wenn der Fisch schon 25 mm lang ist und alle Merkmale der erwachsenen Form besitzt. Im Achsenskelett beginnt sich schon Knorpel zu bilden, die Muskulatur ist fast gänzlich differenziert und die paarigen Flossen haben schon ein inneres Skelett und Muskulatur. Die Kiele sind zuerst eine gewisse Verdickung des Epithels und eine Wucherung der unter ihm liegenden Schicht von Mesenchym. Der Prozess erinnert einigermassen an die ersten Stadien der Bildung der paarigen Flossen beim *Torpedo*, nur ist das Mesenchym schon viel differenzierter, und es haben sich in ihr schon stellenweise Fasern von Bindegewebe gebildet. Die weitere Entwicklung besteht im Wachsen und in der Differenzierung des Bindegewebes.

Bei den Knochenfischen, namentlich bei den Stachelfischen erscheinen die Kiele in einer noch späteren Entwicklungsstufe, wenn der Jungfisch schon endgültig die Form des erwachsenen Fisches erreicht hat und die Gewebe vollständig differenziert sind. Hier nimmt wiederum nur die äussere Coriumschicht an der Kielbildung teil.

Wir finden also, dass sich der Bau und die Entwicklung der Schwanzkiele einerseits an den Bau verschiedener Derivate der unpaarigen Flossenfalte anlehnt, aus welcher sich die unpaarigen Flossen entwickeln, und dass andererseits die Entwicklung der Kiele in ihren früheren Stadien bis zu einem gewissen Grade der Entwicklung der paarigen Flossen gleicht. Die Ähnlichkeit ist umso grösser, je früher sich die Kiele zu entwickeln beginnen. Im Gegensatz zu den unpaarigen und paarigen Flossen besitzen die Kiele weder eine Muskulatur, noch ein inneres Skelett. Dieses entwickelt sich in den paarigen Flossen erst im engsten Zusammenhang mit der Muskulatur. Wir glauben, dass diese Ähnlichkeit es möglich macht, in Analogie zu dem Bau und der Entwicklung der Schwanzkiele zu einer Vorstellung von den früheren Stufen der phylogenetischen Entwicklung der paarigen Extremitäten zu gelangen. Leider kennen wir die Funktionen der Schwanzkiele nicht genau. Wir können nur sagen, dass sie den schnellschwimmenden Fischen mit spindelförmiger Körperform eigen sind, aber auch rochenartigen Formen bei welchen sie die Gestalt rudimentärer Gebilde annehmen. Ausserdem haben die Haie, welche Kiele besitzen viel kleinere Bauchflossen als diejenigen Arten, bei welchen sie fehlen.

Bei den Knochenfischen mit Kielen funktionieren die Bauchflossen aus verschiedenen Gründen überhaupt nicht. Das legt die Annahme nahe, dass die Schwanzkiele die Bauchflossen irgendwie funktionell ersetzen.

Die Lage der Kiele an den beiden Seiten des Schwanzes lässt an die Ergänzungsflächen eines unbeweglichen Stabilisators denken. Doch sind noch spezielle Forschungen nötig, um die Funktionen der Kiele zu bestimmen.

Unseres Erachtens können die Schwanzkiele nur eine wahrscheinliche Vorstellung von den früheren Stufen der Entstehung von paarigen Extremitäten geben. Wir sehen, dass Falten auf dem Körper, welche anscheinend eine Rolle bei der Bewegung spielen, ganz unabhängig bei verschiedenen, einander ganz fernstehenden Fischarten entstehen können. Also ist es durchaus nicht notwendig, bei der Entstehung von paarigen Extremitäten an eine Verbindung dieser mit unpaarigen Flossen oder untereinander zu denken. Wir können sogar an ein mehrmaliges Auftreten paariger Extremitäten denken. Das könnte die Anwesenheit paariger Anhänge bei den fossilen *Ostracodermi*, die mit den Cyclostomen verwandt sind, erklären. Zweitens ist es wohl möglich sich funktionierende Falten ohne Muskulatur und inneres Skelett vorzustellen. Man könnte also annehmen, dass die Muskulatur später entstanden ist und, wie wir es immer in der Ontogenese finden, musste sich in Verbindung damit auch das innere Skelett entwickeln.

Was den Bau dieses Skeletts anbetrifft, so sehen wir in der Ontogenese der paarigen Extremitäten, dass dieses Skelett unbedingt die Phase einer kompakten Bindegewebeplatte passieren musste. Das erlaubt uns die Hypothese aufzustellen, dass auch in der Phylogenese das primitive innere Skelett der paarigen Flossen aus einer kompakten Bindegewebeplatte bestand und dass sich aus ihr erst später einzelne Knorpelstrahlen entwickelten. Ihr Auftreten führt zweifellos zu einer grossen Beweglichkeit der paarigen Extremitäten in diesem Stadium. Aber darüber, wie diese beweglicheren Extremitäten funktionierten, können wir derzeit natürlich nichts aussagen.

Institut der evolutionellen Morphologie
und Paläozoologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
d. 5. VII. 1936.

ERRATA

In the article «Morphology and Cytology of the Hybrid of «*Nicotiana Paniculata* × × *Nicotiana Langsdorffii*» (1936, vol. III, № 6, p. 295, 3rd line) have been prinded: «1925», ought to be read: «1935».

In the title of the article «On the Anabiosis of Fishes in Suppercooled Water» (1936, vol. III, № 6, p. 305) have been printed: «P. J. Schmidt, Corresponding Member of the Academy, G. P. Platonov and S. A. Person», ought to be read: P. J. Schmidt, G. P. Platonov and S. A. Person».

PRIX D'ABONNEMENT

Un an — 36 livraisons . . . . . $ 15
Six mois — 18 livraisons . . . $ 7.50
(Séparément $ 0.50 le numéro)
«Nouvelle Série» pour 1933 — 6 livraisons . . . $ 2
«Nouvelle Série» pour 1934 — l'année complète épuisée; volume III (9 livraisons) et volume IV (9 livraisons) en vente à $ 3 le volume.

URSS — Meždunarodnaja Kniga, 18, Kuznetskij Most, Moscou (Compte courant n° 263 Banque d'Etat de l'URSS, 12, Neglinnaja, Moscou).
U. S. A., NORTH and SOUTH AMERICA — BOOKNIGA CORPORATION. 255 Fifth Avenue. New York, N. Y.
ENGLAND — W. H. SMITH & son, Ltd. Strand House, Portugal St London, W. C. 2.
FRANCE — MESSAGERIES HACHETTE. Service Abonnements. 111, Rue Réaumur. Paris, 2e.
SUISSE — Administration du Journal „LE TRAVAIL". 39, Rue de Lausanne. Genève.
Č. S. R. — MELANTRICH, Akc. Spol. Knihkupectvi — odd. slovanskych knih. Vaclavské nam 42. Praha II. (Ucet post. spor. 20. 208).
BELGIQUE — LIBRAIRIE A. U. S. 38 Vieille Halle-aux-Blés. Bruxelles (C. C. P. 1861. 15). (P. Driessen)
CHINA — AMERICAN BOOK & SUPPLY Co 841 Bubbling Well Road. P. O. Box 1798. Shanghai.
HOLLAND — J. GINSBERG. University Bookseller. Kort Rapenburg, 17. Leiden
LIETUVA — „MOKSLO". Knygynas. Laisves Aleja, 46. Kaunas.
TURQUIE — LIBRAIRIE HACHETTE. Succursale de Turquie. 469, Avenue de l'Indépendance. Boite Postale Pera 2219. Istanbul.
DEUTSCHLAND — OTTO HARROSSOWITZ. Leipzig C. 1. Auerstrasse 14.
POLSKA — GEBETHNER & WOLFF. Filja 1. Krakowskie Przedm. 15. Warszawa.
ROSSICA. Chmielna 5. Warszawa.
PALESTINE — SAFRAN Co Jaffa Rd. 36. P. O. B. 223. Haifa.
LATVIJA — VALTERS un RAPA Akc. Sab. Teatra iela 11. Riga (Pasta tek. rek. № 675)
BULGARIA — T. F. TSCHIPEFF. Buchhandlung Boulevard Dondoukoff 20/22 Sofia. (Postscheckkonto-Sofia 540).
NORGE — JOHAN GRUNDT TANUM. Tidligere Aschehougs Boghandel. Karl Johans gt. 43. Oslo.

Les «Comptes Rendus», largement expédiés à l'étranger dans les centres scientifiques les plus importants et dans les bureaux de nombreuses revues, sont le seul organe scientifique en URSS, donnant tous les dix jours un compte rendu des plus récentes acquisitions de la science soviétique.

Prix — $ 0.50